PLANCHE $\star$: dérivabilité

Exercice 1 : Soit $x \in [0\,;\frac{\pi}{2}]$, démontrer l'inégalité :

$$\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x$$

Exercice 2 : Soit f une fonction dérivable en un point x_0.

Démontrer que :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = f'(x_0)$$

La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 3 : Formule de Leibniz

Démontrer que si f et g sont deux fonctions n fois dérivables sur une partie E de $\mathbb{R}$ alors la fonction fg est n fois dérivable sur E et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}f^{(p)}g^{(n-p)}$$

Exercice 4 :

1. Démontrer que la dérivée n-ième de la fonction cosinus est la fonction définie par : $x \mapsto \cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$.
2. Démontrer que la dérivée n-ième de la fonction sinus est la fonction définie par : $x \mapsto \sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$.
3. En déduire la dérivée n-ième de la fonction $x \longmapsto \cos(ax+b)$ où a et b sont des réels fixés.

Exercice 5 : Calculer la dérivée n-ième de la fonction $x \longmapsto x^2\sin x$.

Exercice 6 :

1. Démontrer que la fonction sinus réalise une bijection de l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}]$ sur l'intervalle $[-1\,;1]$.
2. Sa bijection réciproque sur l'intervalle $[-1\,;1]$ est appelée fonction arcsinus et notée arcsin. Démontrer qu'elle est dérivable sur $]-1\,;1[$ et que :

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3. Tracer la courbe représentative de la fonction arcsinus.
4. On définit de façon analogue les fonctions arccos et arctan, démontrer qu'elles sont dérivables sur un intervalle que l'on précisera et calculer leur dérivée.

Exercice 7 : On considère une fonction f dérivable sur le segment $[0\,;1]$ avec $f(0)=f(1)$.

La fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ f(2x-1) & \text{si } \frac{1}{2} < x \leqslant 1 \end{cases}$$

est-elle continue ? dérivable ?