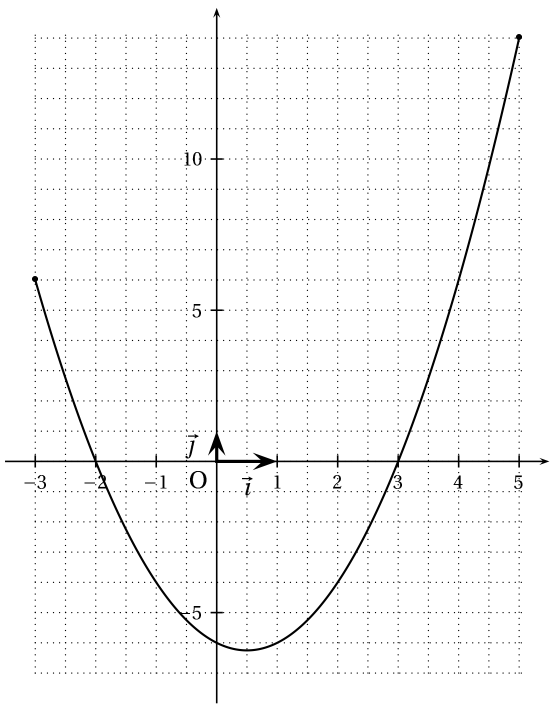
$1^{\text{ère}}$ ES 3 Fonctions

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $[-3;5]$ par $f(x) = x^2 - x - 6$.
Ci-contre, on donne $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de f.



1. Déterminer graphiquement :
- $f(0)$: ....
- l'image de 3 par f : ....
- les éventuels antécédents de -4 par f : ....
- les éventuels antécédents de 10 par f : ....
- les éventuels antécédents de -6 par f : ....
- l'ordonnée du point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 5 : ....
- les solutions de l'équation $f(x) = 3$ ....

2. Déterminer algébriquement l'image de $\frac{1}{2}$ par f.

3. Montrer que pour tout x de $[-3;5]$, $f(x) = (x-3)(x+2)$.

4. Retrouver algébriquement les antécédents de 0 par f.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, f est une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa courbe dans un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Si $f(2) = 3$ alors :

	V	F
• 2 est l'image de 3 par f	❒	❒
• 2 a pour image 3 par f	❒	❒
• 2 est un antécédent de 3 par f	❒	❒
• 3 n'admet pas d'antécédent par f	❒	❒
• 2 est l'abscisse d'un point de $\mathscr{C}_f$ qui a pour ordonnée 3	❒	❒

2. Si $f(x) = x^2 + 2$ alors :

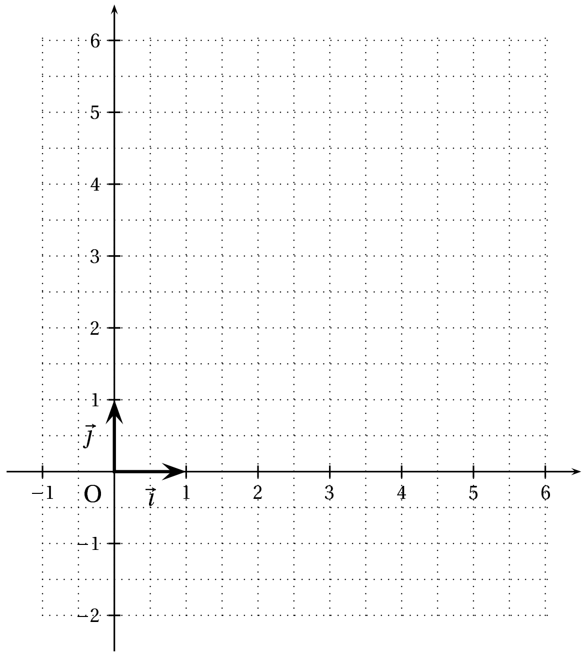
	V	F
• l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution	❒	❒
• 6 admet deux antécédents par f	❒	❒
• l'image de -1 par f est 3	❒	❒
• le point de coordonnées $(2;6)$ est un point de $\mathscr{C}_f$	❒	❒
• $\mathscr{C}_f$ ne coupe pas l'axe des abscisses	❒	❒
• $f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{14}{9}$	❒	❒

Exercice 3

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentant une fonction f définie sur $[-1;6]$ vérifiant les contraintes suivantes :
- $f(-1)=3$;
- l'image de 3 par f est 1 ;
- 2 est un antécédent de -1 par f ;
- 5 est une solution de l'équation $f(x)=6$;
- l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions.

1. Traduire chacune des cinq informations données sur f par une information sur $\mathscr{C}$.

2. Donner une allure possible pour la courbe $\mathscr{C}$.



Exercice 4

Le tableau suivant donne les dimensions, en mm, des billets en euros :

Valeur	Largeur	Longueur
5 €	62	120
10 €	67	127
20 €	72	133
50 €	77	140
100 €	82	147
200 €	82	153
500 €	82	160

Le but de l'exercice est d'eaider le gouvernement syldave à déterminer quelle devrait être la longueur d'un billet de 1 000 € afin d'en fabriquer en série pour redresser la vaillante économie syldave.

1. Représenter la longueur des billets en euros en fonction de leur valeur sur le graphique 1, en suivant les instructions suivantes :
- on prendra 100 mm comme origine de l'axe des ordonnées ;
- on choisira une échelle qui permet de remplir le graphique ;
- on précisera cette échelle ;
- on renseignera les axes.

2. On décide d'utiliser du papier semi-logarithmique qui permet de mieux comparer les ordres de grandeur.

a) Représenter de nouveau la longueur des billet en euros en fonction de leur valeur sur le graphique 2

b) Quelle remarque peut-on faire ?

c) Utiliser cette remarque pour déterminer une valeur approchée de la longueur du billet de 1 000 €.

3. Suite à la remarque faite dans la question précédente, on décide représenter la taille des billets en euros en fonction du « logarithme décimal » de leurs valeurs.
Le logarithme décimal se calcule avec la touche `LOG` de votre calculatrice et se note "log".

a) Compléter le tableau suivant :

Valeur x en €	5	10	20	50	100	200	500
$t = \log(x)$							
Taille y en mm	120	127	133	140	147	153	160

b) Placer les points de de coordonnées $\mathrm{M}(t; y)$ sur le graphique 3, en suivant les instructions suivantes :

- on prendra 5cm comme unité sur l'axe des abscisses et 1mm sur l'axe des ordonnées ;
- on prendra 100 mm comme origine de l'axe des ordonnnées et on renseignera les axes.

c) On remarque les points semblent alignés. Tracer une droite, notée D, qui « approxime » le mieux ce nuage de points. Donner l'équation réduite, $y = mt + p$, de D.

4. On en déduit alors l'expression algébrique de la fonction f qui donne la taille y d'un billet en euros en fonction de sa valeur x :

$$y = f(x) = m \log(x) + p$$

où m et p sont les valeurs que vous avez trouvées précédemment.

a) Tracer la courbe représentative de la fonction f sur le graphique 1.

On programmera sa calculatrice, on calculera $f(5)$ et on tabulera la fonction f :

- au pas de 10 pour $10 \leqslant x \leqslant 100$;
- au pas de 100 pour $100 \leqslant x \leqslant 500$.

b) Déterminer algébriquement la taille d'un billet que devrait avoir un billet de 1 000 €.

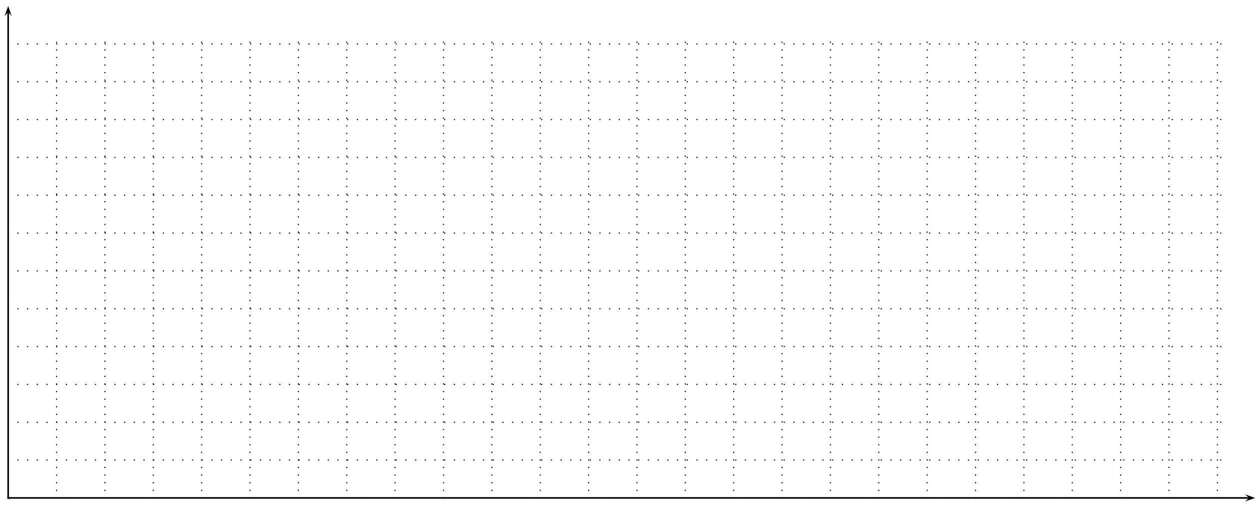


FIG. 1 –

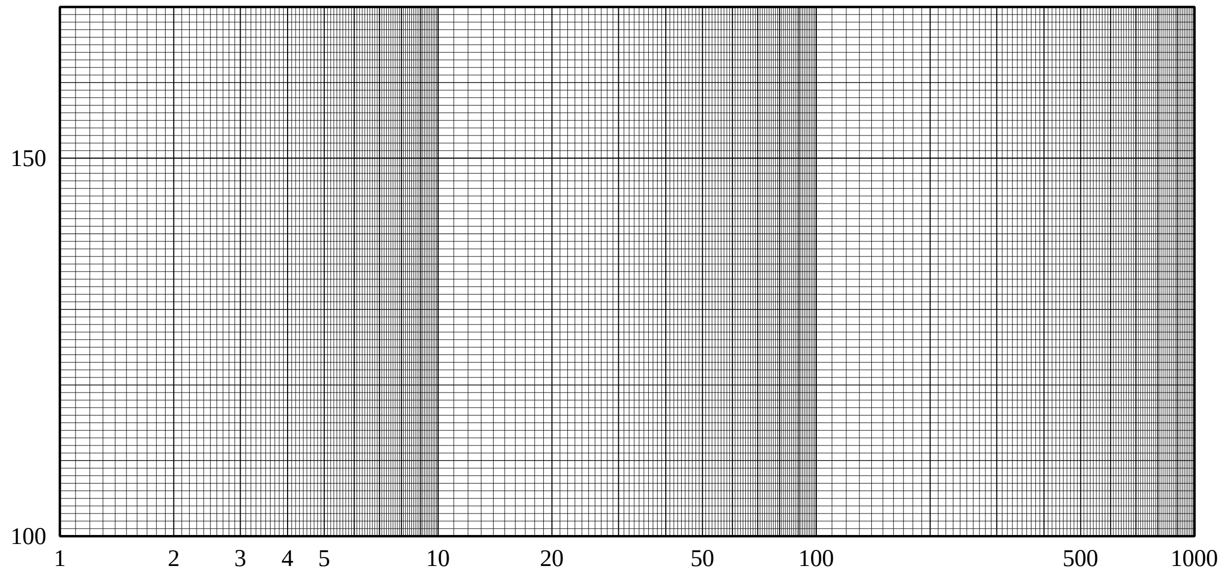


FIG. 2 –

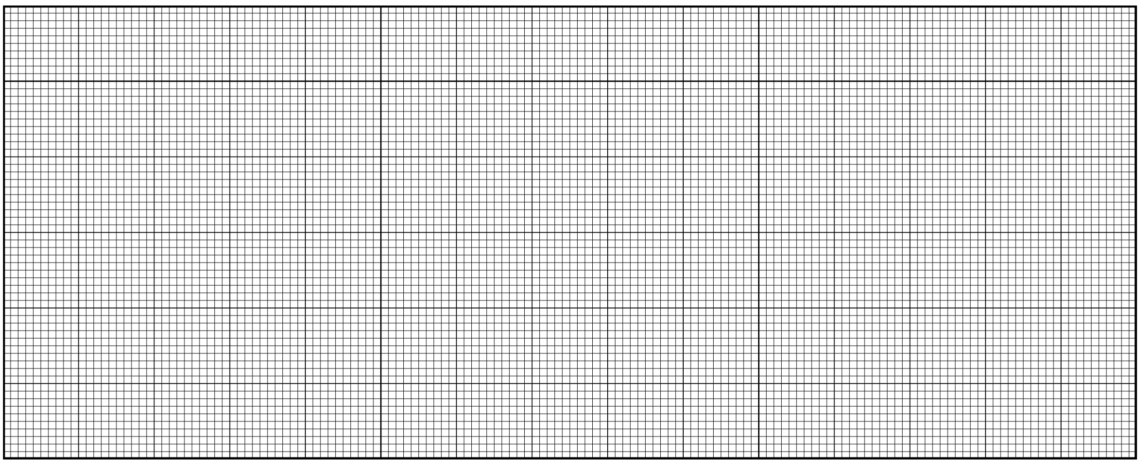


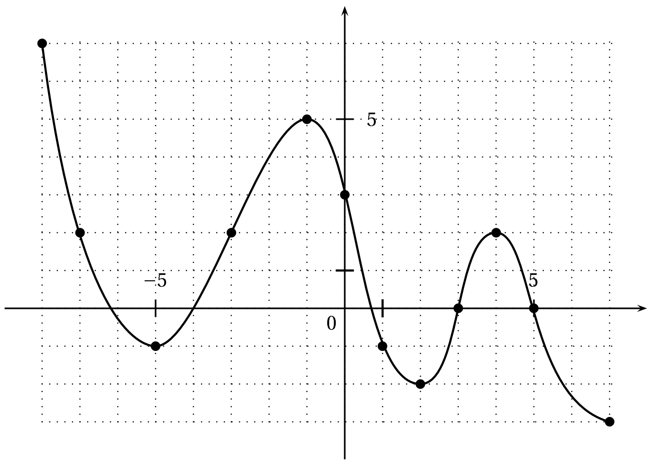
FIG. 3 –

Exercice 5

Soit f la fonction définie par la courbe donnée ci-dessous :

1. Répondre par vrai ou par faux aux proportions suivantes :

	V	F			
	V	**F**	h) f est croissante sur $[-5;-1]$.	❒	❒
a) f est décroissante sur $[-8;7]$.	❒	❒	i) L'équation $f(x) = 3$ admet 3 solutions.	❒	❒
b) Le maximum de f est 7.	❒	❒	j) f est croissante sur l'intervalle $[2,5\,;\,3,5]$.	❒	❒
c) L'image de 5 par f est -1.	❒	❒	k) Le minimum de f sur $[-8,0]$ est -3.	❒	❒
d) L'image de 4 par f est 2.	❒	❒		**V**	**F**
e) $f(7) = -3$	❒	❒	l) $f(-8) > f(6)$.	❒	❒
f) L'ensemble de définition de f est $[-8;7]$.	❒	❒	m) -4 est un antécédent de 0 par f.	❒	❒
g) $f(-1) = 2$.	❒	❒	n) $f(-5) = f(2)$.	❒	❒



o) Le minimum de f est atteint en 7. ❒ ❒

p) $f(0,1) > f(0,2)$. ❒ ❒

q) f est décroissante sur $[-8;-5]$. ❒ ❒

r) L'équation $f(x) = 0$ admet 4 solutions. ❒ ❒

s) f admet un minimum en 2. ❒ ❒

t) Pour tout $x \in [-8;2]$, $f(x) = x^6 + x^2 + 3$. ❒ ❒

u) 2 est l'antécédent de -2 par f. ❒ ❒

v) $f(x) \geqslant -4$ n'admet pas de solutions. ❒ ❒

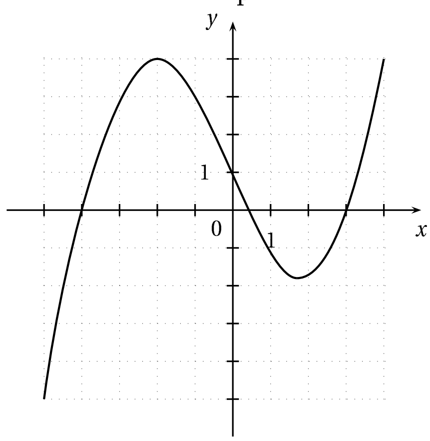
2. Dresser le tableau de variations de cette fonction.

3. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant 3$.

Exercice 6

- Une affirmation juste cochée rapporte 1 point ;
- Une affirmation fausse cochée coûte 1 point.

1. La courbe de la fonction f définie sur $[-5;4]$ est représenté ci-contre :



❒ 0 admet trois antécédents par f.

❒ Tout élément de $[-3.4]$ admet trois antécédents.

❒ $f(-3) \leqslant f(1)$.

❒ Le minimum de f sur $[-5;4]$ est compris entre -2 et -1.

❒ f est croissante sur $[-5;0]$.

2. f est une fonction définie sur $\mathrm{I} = [-4;5]$ et son tableau de variations est donné ci-contre.
De plus $f(-1) = 0$.

x	-4		0		3		5
Var. f	-3	↗	2	↘	0	↗	4

❒ f admet 4 comme maximum sur I.

❒ L'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions.

❒ $f(1,5) < f(1)$

❒ $f(2) = 0$

❒ $f(4) > 0$

❒ f admet 0 comme minimum sur I.

❒ $f(4) > f(-2)$

3. On considère la fonction f définie sur $\mathscr{G}$ par : $f(x) = x^2 - 1$.

❒ L'équation $f(x) = -0,5$ admet deux solutions.

❒ -2 et 2 sont les antécédents de 3 par f.

❒ Si a est un réel négatif, alors il n'y a pas d'antécédent de a par f.

❒ L'équation $f(x) = -2$ n'a pas de solution.

Exercice 7 Pour réviser le Bac de science...

Au temps $t = 0$ on met deux produits chimique A et B dans un bécher. Ils réagissent ensemble de sorte que l'on a constamment $\mathrm{C_A}(t) + \mathrm{C_B}(t) = 1$, où $\mathrm{C_A}(t)$ et $\mathrm{C_B}(t)$ sont les concentrations respectives des produits A et B au temps t. Sur la figure ci-contre on a représenté la concentration du produit A en fonction du temps (en heures).

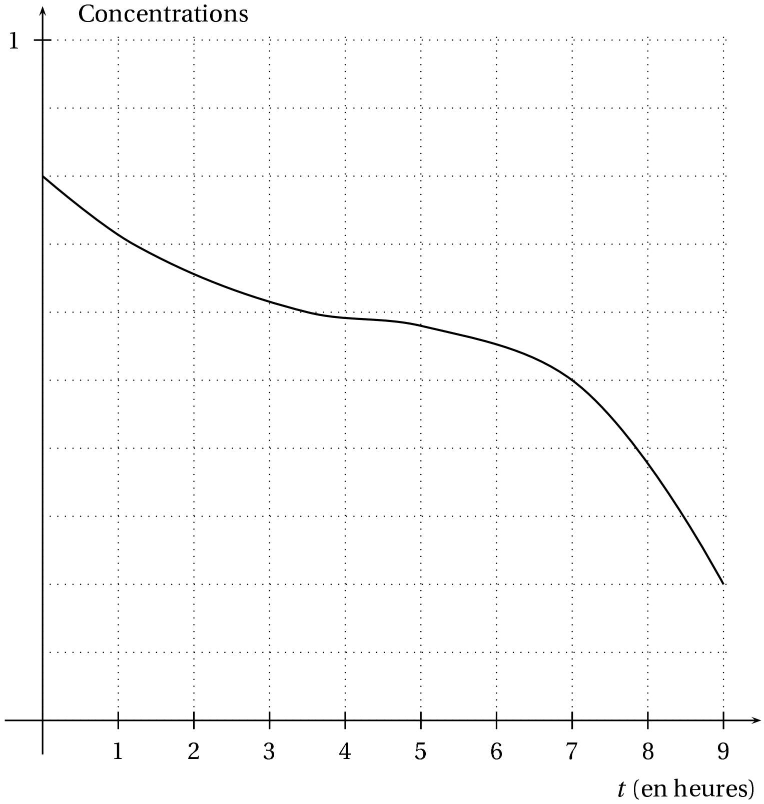
1. Représenter sur le même graphique la concentration $\mathrm{C_B}(t)$ du produit B.

2. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

a) $\mathrm{C_A}(t) = \mathrm{C_B}(t)$

b) $\mathrm{C_A}(t) \geqslant \mathrm{C_B}(t)$

c) $\mathrm{C_B}(t) \geqslant 0,6$



En électricité, si on mesure l'intensité qui traverse une résistance ainsi que la tension à ses bor nes, on trouve la relation suivante :

$$\boxed{\mathrm{U} = \mathrm{RI}}$$

où :
- U est tension (en Volts)
- R est la résistance (en Ohms)
- I est l'intensité (en Ampères)

On effectue une expérience au cours de laquelle on fixe la tension U = 400V aux bornes d'un dipôle et on augmente petit à petit la valeur de la résistance de ce dipôle. La mesure $\mathrm{R}(t)$ de cette résistance au cours du temps est donnée par le graphique ci-contre.

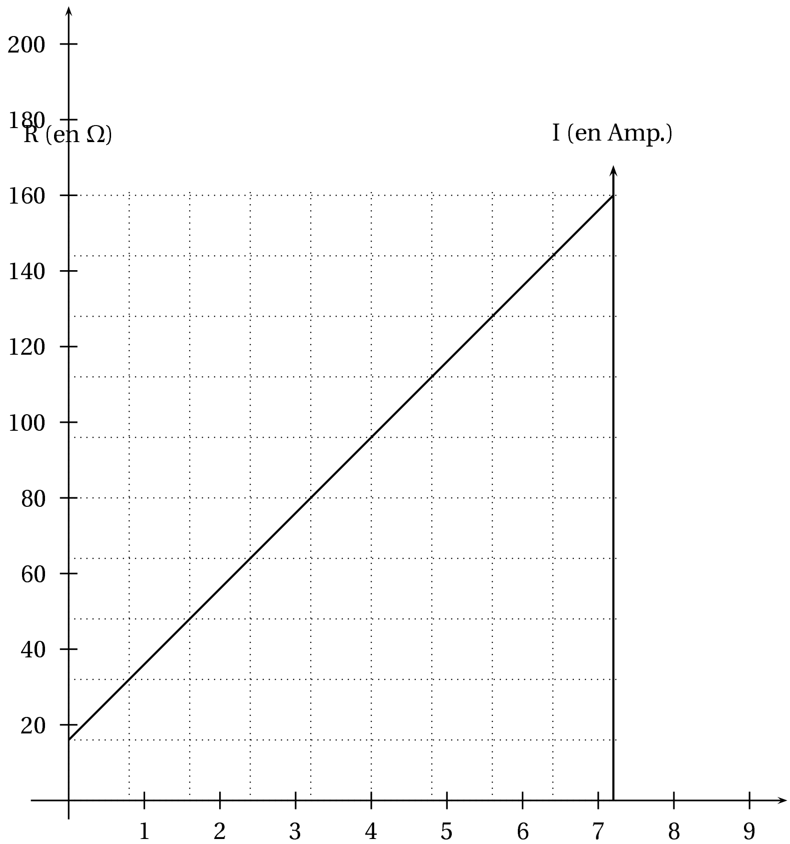
1. Représenter dans le même graphique l'intensité $\mathrm{I}(t)$ en fonction du temps.

2. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

a) $\mathrm{I}(t) = 20$

b) $\mathrm{I}(t) \leqslant 10$

.



Exercice 8 *Les sept messagers* de Dino Buzzati

Depuis que je suis parti explorer le royaume de mon père, je m'éloigne chaque jour davantage de la ville et les nouvelles qui me parviennent se font de plus en plus rares.
Quand j'ai entrepris ce voyage, j'avais à peine trente ans et plus de huit ans se sont écoulés, exactement huit ans six mois et quinze jours d'une route ininterrompue. Au moment du départ, je croyais pouvoir aisément parvenir en quelques semaines aux frontières du royaume, mais je n'ai fait que rencontrer toujours de nouvelles gens et de nouveaux villages et de nouvelles provinces ; et partout des hommes parlant ma propre langue et se prétendant mes vassaux.
Il m'arrive parfois de penser que la boussole de mon géographe s'est affolée et que, tout en croyant aller toujours vers le Sud, nous ne faisons que tourner autour de nous-mêmes, sans jamais parvenir à nous éloigner davantage de la capitale ; cela pourrait peut-être expliquer que nous ne pouvons atteindre les confins du royaume.
Mais je me sens plus souvent taraudé par l'idée que ces frontières n'existent pas, que le royaume s'étend sans aucune limite et que, malgré ce voyage incessant, jamais je n'en verrai la fin.
Je me suis mis en route à trente ans, trop tard peut-être. Mes amis, mes proches même, raillaient mon projet qu'ils jugeaient une perte inutile des meilleures années de la vie. En vérité quelques rares fidèles seulement consentirent à m'accompagner.
Malgré mon insouciance – une insouciance que je ne connais plus ! – j'eus à coeur de prévoir le moyen de communiquer, pendant le voyage, avec ceux qui m'étaient chers et je choisis parmi les cavaliers de mon escorte les sept meilleurs, qui allaient devenir mes messagers.
Dans mon ignorance, je croyais qu'en choisissant sept messagers j'exagérais un peu. Mais je m'aperçus, à mesure que le temps passait, que ce nombre était tout au contraire ridiculement faible. Aucun d'eux pourtant n'est jamais tombé malade, ni ne s'est fait prendre par les brigands, aucun n'a crevé sa monture. Ils m'ont servi tous les sept avec une ténacité, un dévouement que je parviendrai difficilement à jamais récompenser.
Afin de plus facilement les reconnaître je leur imposai de nouveaux noms dans l'ordre alphabétique : Alexandre, Barthélémy, Caius, Dominique, Emile, Frédéric et Grégoire.
Comme j'étais peu habitué à m'éloigner de ma demeure, j'y envoyai le premier, Alexandre, dès le soir du second jour de voyage, après avoir parcouru déjà près de quatre-vingt lieues.

Le lendemain soir, afin d'assurer la permanence des communications, je déléguai le second messager, puis le troisième, puis le quatrième, et ainsi de suite, jusqu'au huitième soir du voyage, celui où partit Grégoire. Le premier n'était pas encore de retour.
Il nous rejoignit le dixième jour, dans une vallée déserte où nous préparions le camp pour y passer la nuit. Alexandre m'apprit qu'il avait dû aller moins vite que nous n'avions prévu : j'avais pensé que, puisqu'il serait seul et montant un remarquable coursier, il pourrait aller deux fois plus vite que nous ; en fait, il n'avait pu franchir qu'une fois et demie la même distance – en une journée – tandis que nous faisions quarante lieues, il en dévorait soixante. Mais pas plus.
Il en fut de même pour les autres. Barthélémy, parti en direction de la ville le troisième soir de notre voyage, nous rejoignit au bout de [...] ; Caius, parti le quatrième jour, fut seulement de retour le [...]. Je compris vite qu'il suffisait de multiplier par [...] les jours passés jusque-là pour connaître la date du retour de chaque messager.

Quand j'en fus au sixième mois de mon voyage – nous avions déjà franchi les monts Fasani – l'intervalle entre l'arrivée de chacun de mes messagers s'accrut à quatre bons mois. Désormais, ils ne m'apportaient que des nouvelles lointaines, ils me tendaient des lettres toutes chiffonnées, roussies par les nuits humides que le messager devait passer en dormant à même les prairies.
Nous marchions toujours. Je tentais en vain de me persuader que les nuages qui roulaient au-dessus de ma tête étaient encore ceux-là mêmes de mon enfance, que le ciel de la ville lointaine ne différait en rien de la coupole bleue qui me surplombait, que l'air était semblable et semblable le souffle du vent, et semblable le chant des oiseaux. Les nuages, le ciel, l'air, les vents, les oiseaux m'apparaissaient en réalité comme des choses nouvelles ; et je me sentais un étranger.
En avant, en avant ! Des vagabonds rencontrés sur les plaines me disaient que les frontières n'étaient plus loin.
J'incitais mes hommes à continuer la route sans répit, faisant mourir sur leurs lèvres les mots désabusés qu'ils s'apprêtaient à dire. Quatre ans avaient passé ; quelle longue fatigue ! La capitale, ma demeure, mon père, étaient curieusement éloignés, je n'y croyais même presque plus. Vingt bons mois de silence et de solitude séparaient désormais les retours successifs des messagers. Ils m'apportaient de curieuses missives jaunies par le temps, dans lesquelles je découvrais des noms oubliés, des tournures de phrases insolites, des sentiments que je ne parvenais pas à comprendre. Et le lendemain matin, après une seule nuit de repos, tandis que nous reprenions notre route, le messager partait dans la direction opposée, portant vers la ville une lettre préparée par moi depuis longtemps.
Mais huit ans et demi ont passé. Ce soir je soupais seul sous ma tente quand est entré Dominique, qui parvenait encore à me sourire malgré cette fatigue qui le terrassait.
Je ne l'avais pas revu depuis près de sept ans. Et pendant ces sept ans-là, il n'avait fait que courir, à travers les prairies, les forêts et les déserts, changeant Dieu sait combien de fois sa monture, pour m'apporter ce paquet d'enveloppes que je n'ai pas encore eu à cette heure l'envie d'ouvrir. Déjà il s'en est allé dormir, il repartira demain à l'aube. Il repartira pour la dernière fois. J'ai calculé sur mon carnet que, si tout va bien, si je continue ma route comme je l'ai fait jusqu'ici et lui la sienne, je ne pourrai revoir Dominique que dans trente-quatre ans. J'en aurai alors soixante-douze. Mais je commence à ressentir ma lassitude et la mort probablement m'aura cueilli avant. Ainsi donc je ne pourrai plus le revoir. Dans trente-quatre ans (même avant, bien avant) Dominique découvrira soudain les feux de mon campement, et il se demandera comment il est possible qu'en un si long temps je n'aie pu faire que si peu de chemin. Le brave messager entrera sous ma tente, comme ce soir, tenant les lettres jaunies par les années, emplies de nouvelles absurde d'un temps déjà révolu ; mais il s'arrêtera sur le seuil, en me voyant immobile, étendu sur ma couche, deux soldats à mes côtés portant des torches, mort.
Et pourtant va, Dominique, et ne m'accuse point de cruauté ! Porte mon dernier salut à cette ville où je suis né. Tu es le seul lien qui me reste avec un monde qui jadis était aussi le mien. Les plus récentes nouvelles m'ont appris que bien des choses ont changé, que mon père est mort, que la couronne est allée sur la tête de mon frère aîné, que l'on me croit perdu, qu'on a construit de grands palais de pierre là où jadis se trouvaient les chênes sous lesquels j'aimais m'en aller jouer. Mais c'est pourtant toujours mon antique patrie. Dominique, tu es mon dernier lien avec eux. Le cinquième messager, Emile, qui me rejoindra si Dieu le veut dans un an et huit moi, ne pourra repartir : il n'aurait plus le temps de revenir. Après toi le silence, oh ! Dominique, à moins que je n trouve enfin cette frontière tant attendue. Mais plus j'avance, plus je suis convaincu qu'il n'y a pas de frontière.
Je le soupçonne, il n'existe pas de frontière, du moins dans le sens que nous entendons habituellement. Il n'existe pas de murailles de séparation, ni de vallées profondes, ni de montagnes fermant la route. Je franchirai probablement les confins sans même m'en apercevoir, et continuera dans mon ignorance à aller de l'avant.
Pour cela, j'entends que désormais Emile, et les autre après lui, quand ils me seront revenus, ne reprennent plus la route de ma capitale mais qu'ils partent de l'autre côté, qu'ils me précèdent afin que je puisse savoir à l'avance ce qui m'attend.
Un trouble inconnu s'empare de moi le soir depuis quelque temps déjà et ce n'est plus le regret des joies que j'ai laissées, comme il advenait dans les débuts de mon voyage ; c'est plutôt l'impatience de connaître les terres inconnues vers lesquelles je me dirige.
Je remarque toujours davantage – et je ne l'ai confié à personne jusqu'ici – je remarque comment de jour en jour, à mesure que j'avance vers l'improbable fin de ce voyage, une lueur insolite brille dans le ciel, une lueur que je n'ai jamais vue, pas même en rêve ; et comment les ombres et les montagnes, les fleuves que nous traversons semblent devenir d'une essence toute diverse ; et l'air est tout chargé de présages d'un je ne sais quoi.

Demain matin, une espérance nouvelle me portera encore plus avant, vers ces montagnes inexplorées que les ombres de la nuit cachent encore.
Une fois encore je lèverai mon camp, tandis que Dominique disparaîtra de l'autre côté de l'horizon, pour transmettre à la trop lointaine cité mon message inutile.

Dino Buzzati, L'Ecroulement de la Baliverna,
©éd. Robert Laffont, 1969

1. Combler les blancs dans le texte en gras.
2. Calculer les dates successives de départ et de retour au camp des sept messagers pendant les cinq premières années.
3. Démontrer la dernière affirmation du paragraphe en gras.
4. Etablir un graphique représentant les mouvements de l'expédition et ceux d'Alexandre, de Barthélémy et de Caius pendant les deux premiers mois.
   Unités : sur l'axe des abscisses, 5 mm = 1 jour, sur l'axe des ordonnées, 1 mn = 10 lieues.

Exercice 9 Autant en emporte le vent !

> En été, rien de tel qu'une petite brise pour rafraîchir l'atmosphère. Rien de tel aussi, en hiver, qu'une forte bise pour vous glacer des pieds à la tête ... Le vent, quand il est plus froid que notre peau, nous refroidit : il emporte la chaleur de notre corps. Autant en emporte le vent ...

S'il y a du vent, on peut avoir l'impression qu'il fait 5° alors que la température réelle est de 20°, ou bien qu'il gèle, alors qu'il fait 10°. Et cet effet est autrement plus dramatique dans les situations extrêmes rencontrées par les alpinistes ou les explorateurs polaires ...

Le document de base

		AIR TEMPERATURE (degrees Farenheit)									
		−40	−30	−20	−10	0	10	20	30	40	50
WIND SPEED (miles per hour)	5	−44.4									48.6
	10	−65.6									41.8
	15	−88.4									34.5
	20	−102									30.3
	25	−108									28.1
	30	−112									27
	35	−114									26.4
	40	−115									26

TAB. 1 – Windchill Equivalent Temperature
(extrait de « Exploring our world » édité par la National Geographic Society, Washington, 1989)

Le 1 tableau présente pour nous deux inconvénients majeurs : il utilise des unités anglo-saxonnes, il est très incomplet et un inconvénient mineur : il est en anglais !

Votre objectif

Dresser un tableau, en unités usuelles (et en français !) de toutes les températures équivalentes – c'est-à-dire ressenties par l'organisme – pour des températures d'air comprises entre −50°C et +20°C au pas de 10°C et des vitesses de vent allant de 10 km/h à 60 km/h au pas de 10 km/h.

Les étapes de votre travail

1. Conversion des données

a) 1 mile ≈ 1,6 km/h : calculer en km/h les vitesses données dans le tableau.

b) Sachant que, pour les anglo-saxons, l'eau gèle à 32°F et bout à 212°F, calculer les températures Celsius correspondant à −40°F et à +50°F.

c) Convertir en km/h et °C toutes les données du document de base.

2. Tracé et lecture de courbes

a) On suppose que la température t de l'air est de −40°C : la température équivalente T est fonction de la vitesse V du vent.
Dans un repère où l cm représente 4 km/h et 5°C 4, placer les points dont les coordonnées sont dans le tableau que vous avez obtenu au **1.1.**.
Tracer soigneusement la courbe représentative de la fonction sachant que pour un vent très faible la température apparente varie très peu.

b) Relever graphiquement les températures équivalentes pour V allant de 10 km/h à 60 km/h, au pas de 10 km/h, et les placer dans un tableau.

c) Reprendre les questions **2.1.** et **2.2.** avec une température t de l'air égale à 10°C.

3. Interpolation linéaire On fait l'hypothèse que le refroidissement dû au vent est une fonction linéaire de la température t de l'air : dans ces conditions, si la vitesse V du vent reste constante, la température équivalente T est une fonction affine de t.

a) On suppose que la vitesse V du vent est égale à 60 km/h. Dans un repère où 1 cm représente 5° C 5,
tracer la droite représentant la fonction affine $t \mapsto \mathrm{T}$.

b) Relever graphiquement les valeurs de T pour : t allant de −50°C à 20°C, au pas de 10°C.

c) Reprendre les questions **3.1.** et **3.2.** pour V allant de 50 km/h à 10 km/h, au pas de 10 km/h.

4. Conclusion et applications

a) Regrouper les résultats en un tableau du type de celui du document original : l'objectif est atteint !

b) Trouver trois exemples d'applications pratiques de votre tableau (penser par exemple qu'en roulant à mobylette à 50 km/h, vous subissez un vent de 50 km/h.).

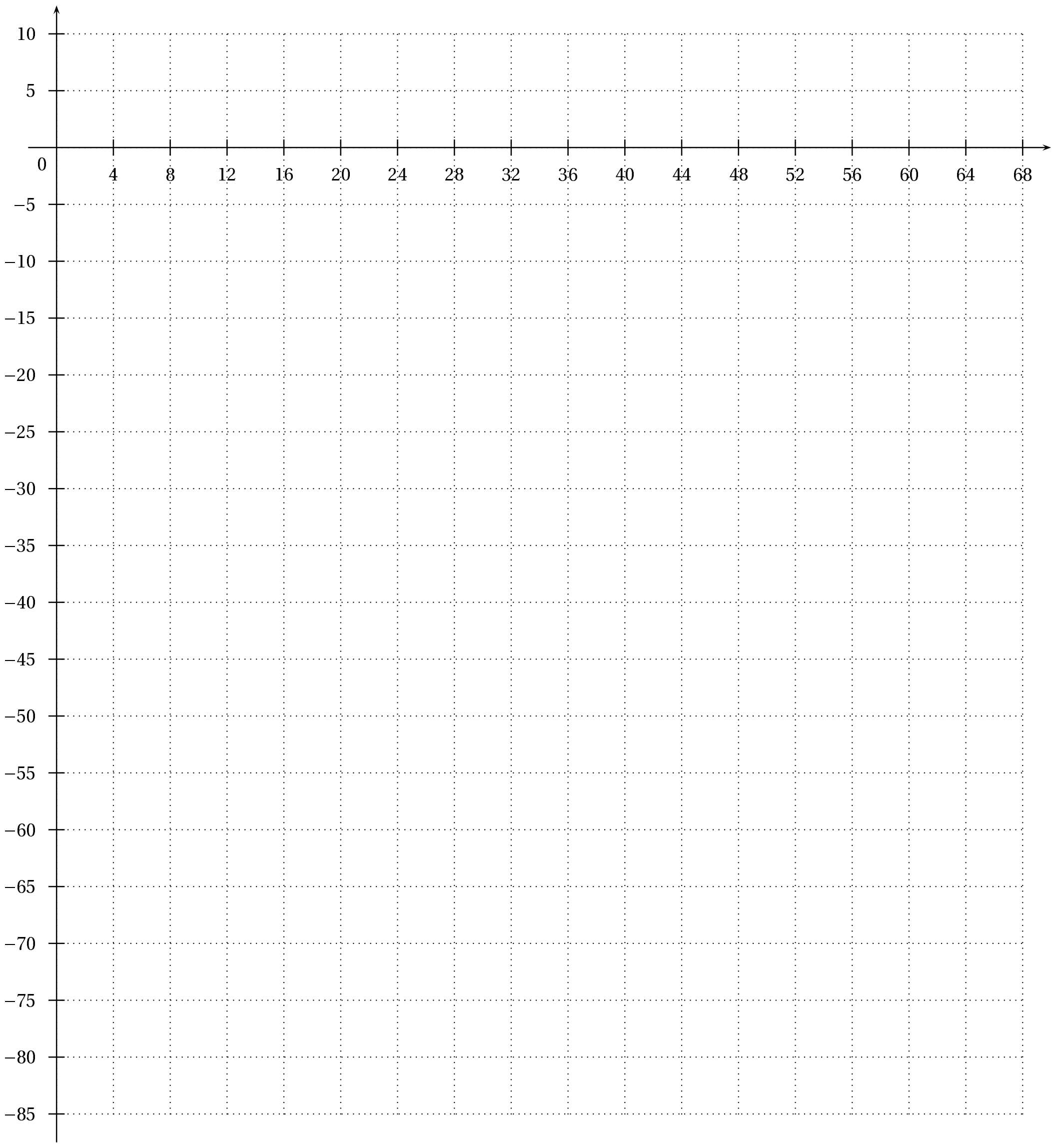


FIG. 4 – Température équivalente en fonction de la vitesse du vent

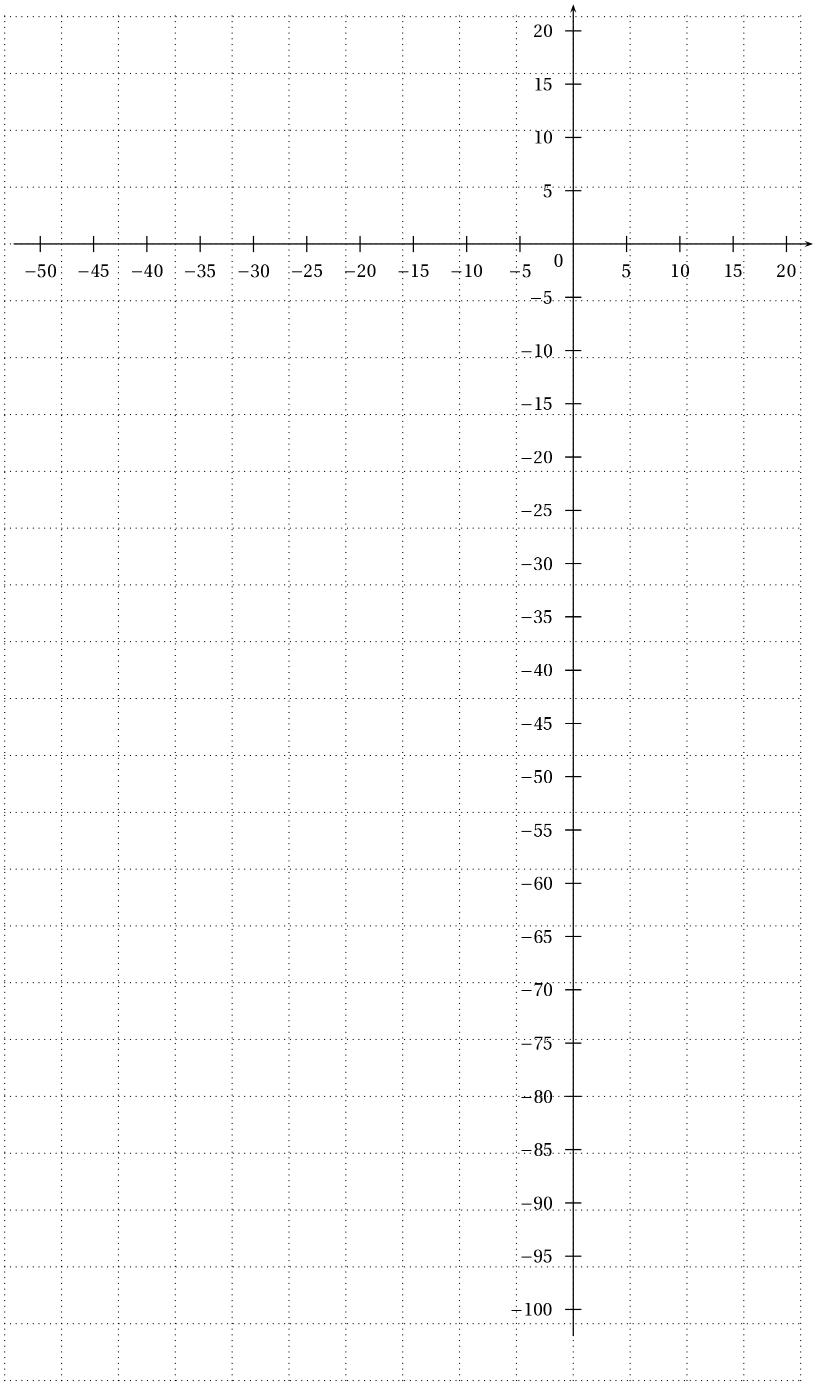


FIG. 5 – Température équivalente en fonction de la température réelle