Mathématiques

T$^{\text{ale}}$S3 / 2018-2019

Mis à jour le 18 octobre 2018 à 17:17

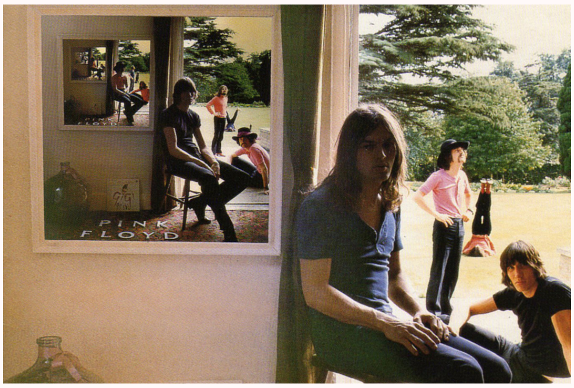
Une année de mathématiques en T$^{\text{ale}}$S

Notre Dame
LYCÉES Rezé

Guillaume CONNAN

THÈME Nº 4

Récurrence



1 Mise en abîme

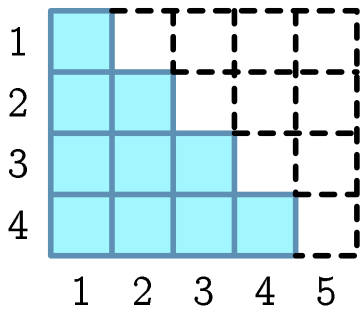
1 0 1 Génétique syldave

Les scientifiques syldaves viennent de mettre en évidence que la terrible maladie de Mathieu est en fait héréditaire : cette maladie frappe depuis des siècles les petits syldaves et les fait naître avec un unique mais énorme cheveu sur la tête.
C'est Vaclav Grtschtsz qui, le premier, contracta cette maladie en 1643 après être rentré en contact avec des vénusiens : ce fait peu connu marque la cause de l'apparition de la maladie en Syldavie. Depuis, tous ses descendants ont souffert de ce terrible mal et aucun médicament terrestre ne semble en mesure de stopper cette calamité.
Résumons les faits :

1. la maladie de Mathieu fait naître les nouveaux nés avec un énorme et unique cheveu sur la tête. Notons n la n^e génération aprés Vaclav.
   Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « la n^e génération sera infectée par la maldie »
2. initialisation : un premier syldavien est infecté en 1643, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie ;
3. l'hérédité de la maladie a été prouvée : si un des parents de la k^e génération est atteint, alors ses enfants de la $k+1^e$ génération seront également infectés, ce qui se traduit par
$$\mathcal{P}(k) \Longrightarrow \mathcal{P}(k+1)$$
4. nous en déduisons que, quelque soit la génération n des descendants de Vaclav, ceux-ci seront infectés, c'est à dire que $\mathcal{P}(n)$ est vraie quelque soit l'entier naturel n.

1 0 2 Jouons aux cubes

Voici un test de fin d'étude maternelle en Syldavie : prenez un cube, placez en-dessous deux autres cubes, et encore en-dessous trois cubes, etc.



Combien y a-t-il de cubes bleus au total sur le dessin ci-dessus ? On peut encore les compter à la main, mais que faire si je vous demande le nombre de cubes lorsqu'on a placé 100 rangées ? n rangées ?
Le dessin nous donne une idée : si nous complétons la figure pour former un rectangle, il y a deux fois plus de cubes, mais maintenant nous pouvons les compter. Il y en a en effet $\dfrac{4(4+1)}{2}$, et donc
$$1+2+3+4=\frac{4(4+1)}{2}$$
Reprenons la méthode adoptée pour étudier la génétique syldave :

1. Nous allons essayer de prouver que la propriété suivante est vraie pour tout entier naturel non nul n
$$\mathcal{P}(n) \;:\; « \; 1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \; »$$
2. Il est facile de vérifier que $1=\dfrac{1(1+1)}{2}$, donc la deuxième étape de notre raisonnement est vérifiée
$$\mathcal{P}(1) \quad \text{est vraie}$$

3. Supposons qu'une « génération », appelons-la par exemple la k ^{e} , soit « infectée ». Plus sobrement on dira : soit k un entier supérieur à 1. Supposons que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie et essayons alors de montrer que cela implique que la génération suivante , la k+1 ^{e} , sera elle aussi infectée, c'est à dire

$$\mathcal{P}(k) \quad \text{vraie} \Longrightarrow \mathcal{P}(k+1) \quad \text{vraie}$$

Il s'agit donc de calculer $1+2+3+\cdots+k+(k+1)$ sachant que $1+2+3+\cdots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$, or

$$\begin{aligned}
1+2+3+\cdots+k+(k+1) &= \underbrace{1+2+3+\cdots+k} \quad +(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)}{2} \quad +(k+1) \\
&= (k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right) \\
&= (k+1)\left(\frac{k+2}{2}\right) \\
&= \frac{(k+1)(k+1+1)}{2}
\end{aligned}$$

Nous en déduisons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie elle aussi.

4. Nous avons vérifié que la propriété était vraie au rang 1 et qu'elle était héréditaire. Nous allons donc en déduire que la propriété sera toujours vraie, quelque soit l'entier naturel non nul n grâce au théorème admis suivant

1 1 Le théorème

Théorème 4 - 1

(admis) Raisonnement par récurrence
Soit $\mathcal{P}$ une propriété dépendant d'un rang n. Pour montrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tous les entiers naturels n supérieurs à un certan n_0

1. On expose clairement la propriété $\mathcal{P}(n)$.
2. On vérifie que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie : c'est le **pas initial** de la récurrence.
3. On démontre que $\mathcal{P}(k) \Longrightarrow \mathcal{P}(k+1)$ ce qui exprime que la propriété $\mathcal{P}$ est **héréditaire**.
4. Il reste à **conclure** en annonçant que, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel n

1 2 Application à l'étude decertaines propriétés des suites définies par une relation de récurrence

Voici quelques idées *simples* qui pourront vous guider dans votre étude d'une suite définie par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$.
définie par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

- Commencez par étudier la fonction f : si par chance elle est croissante sur un intervalle intéressant, vous pourrez prouver des inégalités intéressantes (en utilisant la **conservation de l'ordre** par f qui est **croissante**) et en particulier étudier le sens de variation de la suite selon que u_0 est supérieur ou inférieur à u_1.
- On doit souvent démontrer que la suite est minorée ou majorée par un nombre particulier qui est souvent un **point fixe**, c'est-à-dire un nombrevérifiant $f(x) = x$. u=Une rapide récurrence (si f est croissante) montrera que l'inégalité entre u_0 et un point fixe va se conserver.
- Monotone et bornée, onpourra conclure que la suite converge.

1 3 La fameuse limite des suites géométriques !

Enfin !
Démontrez par récurrence que pour tout réel positif x et tout entier naturel n on a :

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx \qquad \text{Inégalité de Bernoulli}$$

Que peut-on en déduire sur la limite de $(1+x)^n$? Quel rapport avec les suites géométriques ?

Théorème 4 - 2

Limite de suites géométriques (Partiellement admis, partiellement ROC)
Soit q unnombre réel.

- ROC : Si $q > 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
- Si $q = 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = 1$
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$
- Si $q < -1$ alors la suite (q^n) n'admet pas de limite.

EXERCICES

Recherche 4 - 1 Jouons...

Prenons un cube, rajoutons trois autres cubes pour former un carré, puis cinq autres cubes pour former un plus grand carré, puis sept autres cubes pour former un carré encore plus grand...

Nous voulons maintenant calculer la somme des n premiers entiers impairs.

1. Proposez une formule générale inspirée du résultat de notre petite activité de *maternelle*.
2. Démontrez la formule par récurrence.

Recherche 4 - 2 Observons...

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 10u_n - 9 \end{cases}$$

Observez, conjecturez, prouvez.

Recherche 4 - 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = -4$ et $u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n}{2} + 3}$

- Montrez par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée par 0 et 2.
- Montrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- — Démontrez par récurrence que :

$$0 < 2 - u_n 1/2^{n-1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

  — Déduisez-en que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Recherche 4 - 4

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_0 = 6$ et, pour tout entier naturel n

$$v_{n+1} = 1,4v_n - 0,05v_n^2$$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1,4x - 0,05x^2$.
   - i. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,8]$.
   - ii. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,
     $0 \leqslant v_n < v_{n+1} \leqslant 8$.
2. En déduire que la suite (v_n) est convergente.

Recherche 4 - 5 Bac

On considère deux suites (u_n) et (v_n) :

- la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$;
- la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 2^n$.

Partie A : Conjectures

Florent a calculé les premiers termes de ces deux suites à l'aide d'un tableur.

Une copie d'écran est donnée ci-dessous.

	A	B	C
1	rang n	terme u_n	terme v_n
2	0	1	1
3	1	5	2
4	2	12	4
5	3	25	8
6	4	50	16

1. Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des deux suites ?

2. Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13 Florent obtient les résultats suivants :

12	10	3080	1024
13	11	6153	2048
14	12	12298	4096
15	13	24587	8192

Conjecturer les limites des suites (u_n) et $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

Partie B : Étude de la suite (u_n)

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a
$u_n = 32^n + n - 2$.

2. Déterminer la limite de la suite (u_n).

3. Déterminer le rang du premier terme de la suite supérieur à 1 million.

Partie C : Étude de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$

1. Démontrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3.

2. On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 4, on a : $0 < \dfrac{n}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Déterminer la limite de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

Recherche 4 - 6 **Bac**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 6$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

Le but de cet exercice est d'étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).

Partie A :

On souhaite calculer les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) à l'aide d'un tableur.

On a reproduit ci-dessous une partie d'une feuille de calcul, où figurent les valeurs de u_0 et de u_1.

	A	B
1	n	u_n
2	0	3
3	1	6
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	

1. Donner une formule qui, saisie dans la cellule B4, puis recopiée vers le bas, permet d'obtenir des valeurs de la suite (u_n) dans la colonne B.

2. Recopier et compléter le tableau ci-dessus. On donnera des valeurs approchées à 10^{-3} près de u_n pour n allant de 2 à 5.

3. Que peut-on conjecturer à propos de la convergence de la suite (u_n) ?

Partie B : Étude de la suite

On considère les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \quad \text{et} \quad w_n = u_n - 7.$$

1. **i.** Démontrer que (v_n) est une suite constante.

ii. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4}$.

2. **i.** En utilisant le résultat de la question **1. b.**, montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n < u_{n+1} < 15$.

ii. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. **i.** Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

ii. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 7 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

iii. Calculer la limite de la suite (u_n).

Recherche 4 - 7 Bac

On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine. Chaque individu de la population peut être, à l'exclusion de toute autre possibilité :

- soit susceptible d'être atteint par le virus, on dira qu'il est « de type S » ;
- soit malade (atteint par le virus) ;
- soit immunisé (ne peut plus être atteint par le virus).

Un individu est immunisé lorsqu'il a été vacciné, ou lorsqu'il a guéri après avoir été atteint par le virus.

Pour tout entier naturel n, le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes :

- Parmi les individus de type S en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$: 85 % restent de type S, 5 % deviennent malades et 10 % deviennent immunisés ;
- Parmi les individus malades en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$: 65 % restent malades, et 35 % sont guéris et deviennent immunisés.
- Tout individu immunisé en semaine n reste immunisé en semaine $n+1$.

On choisit au hasard un individu dans la population. On considère les évènements suivants :
S_n : « l'individu est de type S en semaine n » ;
M_n : « l'individu est malade en semaine n » ;
I_n : « l'individu est immunisé en semaine n ».

En semaine 0, tous les individus sont considérés « de type S », on a donc les probabilités suivantes :

$$P(S_0) = 1 \ ; \ P(M_0) = 0 \text{ et } P(I_0) = 0.$$

On étudie à long terme l'évolution de la maladie.
Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = P(S_n)$, $v_n = p(M_n)$ et $w_n = P(I_n)$ les probabilités respectives des évènements S_n, M_n et I_n.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n + v_n + w_n = 1$.
   On admet que la suite (v_n) est définie par $v_{n+1} = 0,65v_n + 0,05u_n$.
2. À l'aide d'un tableur, on a calculé les premiers termes des suites (u_n), (v_n) et (w_n).

	A	B	C	D
1	n	u_n	v_n	w_n
2	0	1	0	0
3	1	0,8500	0,0500	0,1000
4	2	0,7225	0,0750	0,2025
5	3	0,6141	0,0849	0,3010
6	4	0,5220	0,0859	0,3921
7	5	0,4437	0,0819	0,4744
8	6	0,3771	0,0754	0,5474
...	...	...	...	...
20	18	0,0536	0,0133	0,9330
21	19	0,0456	0,0113	0,9431
22	20	0,0388	0,0096	0,9516

*Pour répondre aux questions **a.** et **b.** suivantes, on utilisera la feuille de calcul reproduite ci-dessus.*

   i. Quelle formule, saisie dans la cellule C3, permet par recopie vers le bas, de calculer les termes de la suite (v_n) ?
   ii. On admet que les termes de (v_n) augmentent, puis diminuent à partir d'une certain rang N, appelé le « pic épidémique » : c'est l'indice de la semaine pendant laquelle la probabilité d'être malade pour un individu choisi au hasard est la plus grande.
   Déterminer la valeur du pic épidémique prévue par ce modèle.
3. i. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,85u_n$.
   En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   ii. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n,

$$v_n = \frac{1}{4}\left(0,85^n - 0,65^n\right).$$

4. Calculer les limites de chacune des suites (u_n), (v_n) et (w_n).
   Que peut-on en déduire quant à l'évolution de l'épidémie prévue à long terme par ce modèle ?