Exercice 1

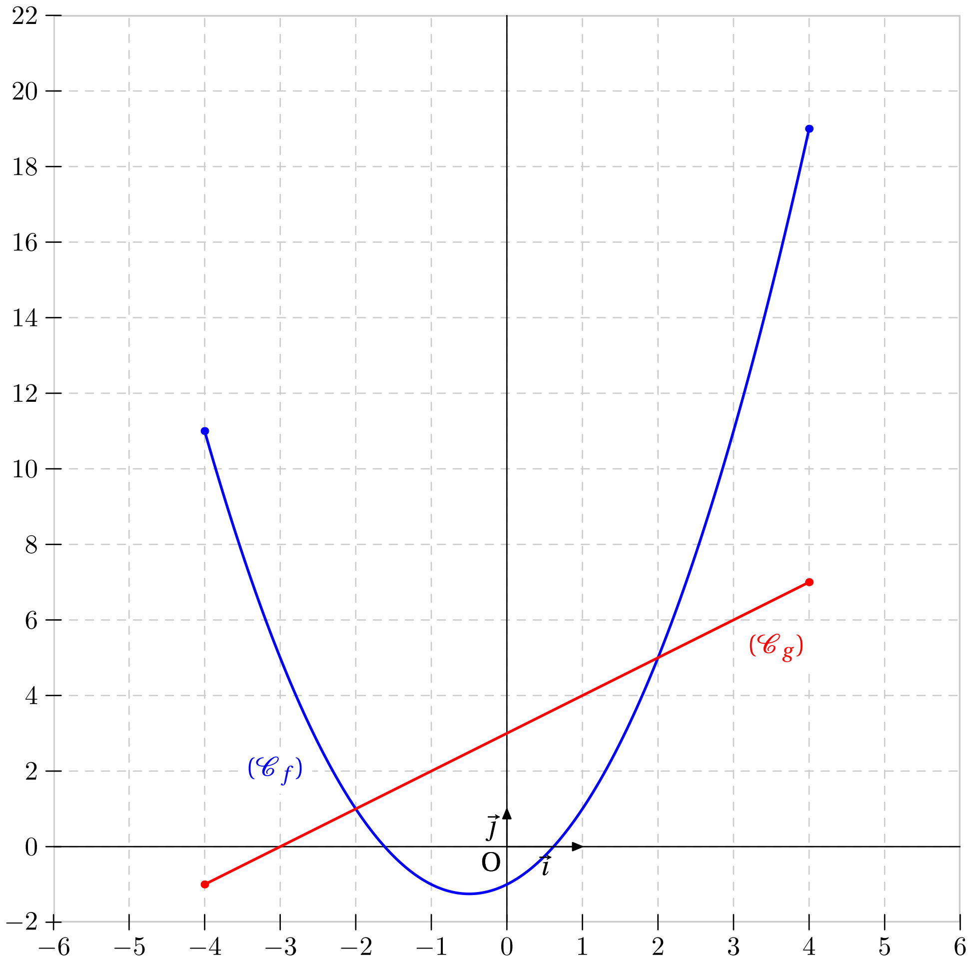
Dans un repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ )$ orthonormal, on considère les fonctions f et g définies par
$f(x) = (x-2)(x+3)+5$ et $g(x) = x+3$ sur l'intervalle $[-4\ ;\ 4]$.

1) Tracer les courbes représentatives de f et g nommées $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$.

2) Graphiquement, résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.

3) Par le calcul, retrouver le résultat précédent.

Illustration



Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3x+5}{x+2}$. On note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère $(O\,;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.

1) **a)** Calculer sa dérivée $f'(x)$ et étudier son signe.

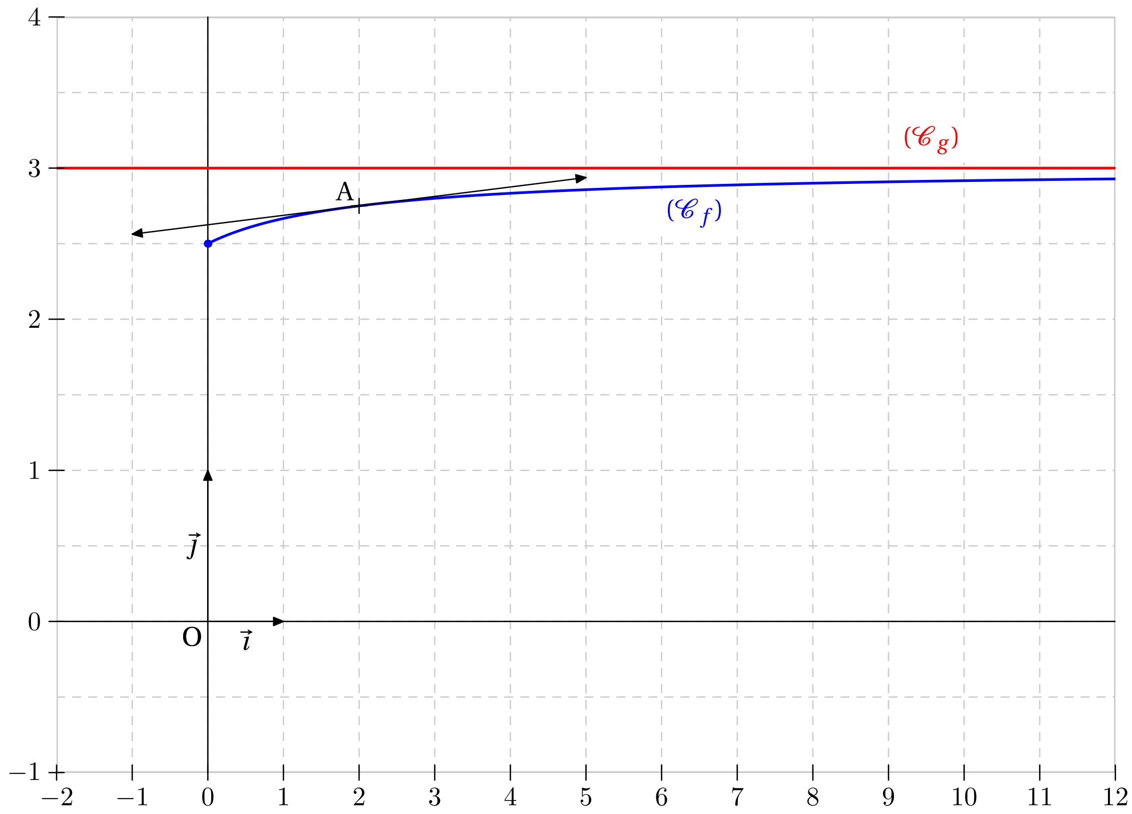
b) Donner le tableau de variation de f.

2) **a)** Calculer $f(x)-3$. Comment interpréter le signe de ce résultat ?

3) Déterminer une équation de la tangente (d) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse $x=2$.

4) Représenter la fonction f, la droite (d) et la droite d'équation $y=3$.

Illustration



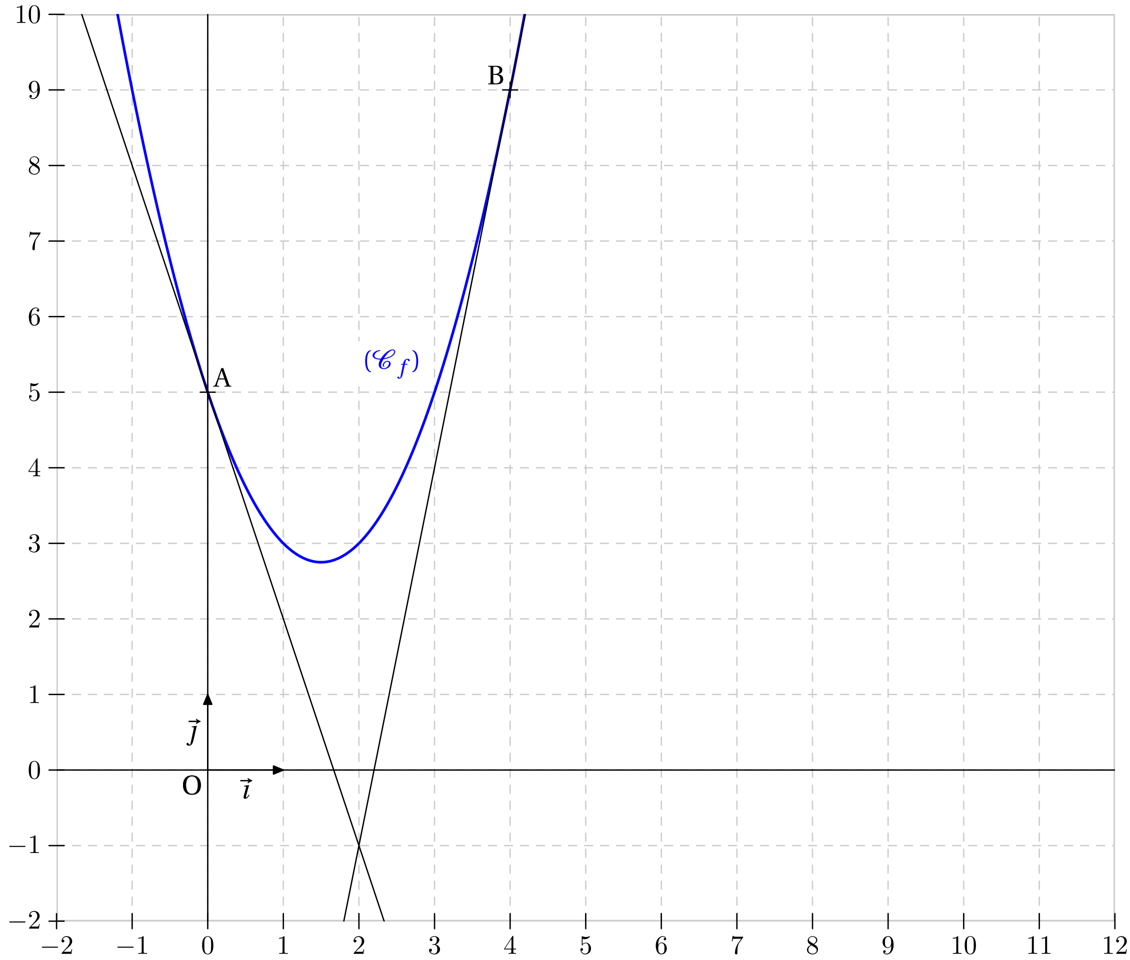
Exercice 3

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 3x + 5$.

1) Calculer la dérivée $f'(x)$. En déduire le sens de variation de f sur l'intervalle $[-2\ ;\ 5]$.
2) Donner le tableau de variation de f sur cet intervalle.
3) Expliquer que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une tangente horizontale (d) dont on déterminera l'équation.
4) Déterminer une équation de la tangente (T_A) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point A d'abscisse $x_A = 0$.
5) Déterminer une équation de la tangente (T_B) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point B d'abscisse $x_B = 4$.
6) Tracer précisément sur une feuille de papier millimétré, la courbe $(\mathcal{C}_f)$, les droites d, (T_A) et (T_B).

Rappel :
Un graphique doit comprendre les informations suivantes :
- deux axes intelligemment placés sur la feuille en tenant compte du tableau de variation de la fonction ;
- le repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$;
- les graduations sur les axes ;
- les points de passage marqués d'une croix (environ un point tous les $3\ cm$) ;
- les points particuliers ;
- les tangentes horizontales éventuelles ;
- les asymptotes éventuelles
- des courbes régulières (si possible en couleur) avec leur nom entre parenthèses ;
- les équations des courbes dans un angle de la feuille ;
- le nom de l'exercice en question.

Illustration



Exercice 4

Soit la fonction f définie par : $f(x) = 3x - 4 + \dfrac{5}{x-1}$.

1) **a)** Quelle est la valeur interdite pour f ?

b) Calculer les deux limites associées à cette valeur.

c) Quelle interprétation graphique peut-on en déduire ?

2) **a)** Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Calculer $f(x) - (3x - 4)$. A l'aide d'un calcul de limites, montrer que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ représentative de la fonction f admet une asymptote oblique que l'on précisera.

3) Calculer $f'(x)$. En déduire les variations de f.

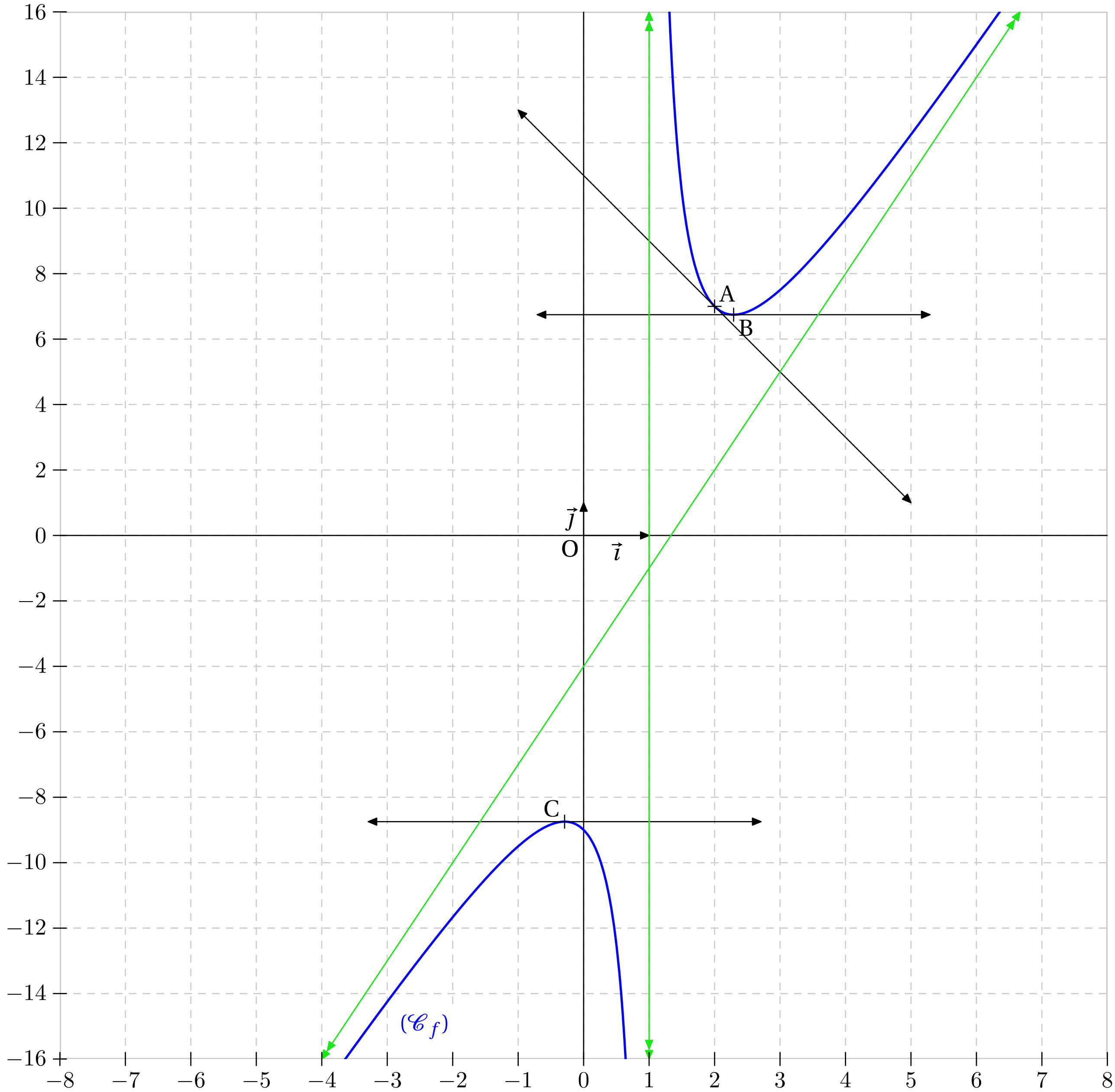
4) Donner le tableau de variations complet de f. Préciser les éventuelles tangentes horizontales.

5) Déterminer une équation de la tangente (T_A) au point A d'abscisse $x_A = 2$.

6) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$, ses asymptotes et les tangentes étudiées dans l'exercice.

NB : on prendra soin de bien vérifier la cohérence des résultats.

Illustration

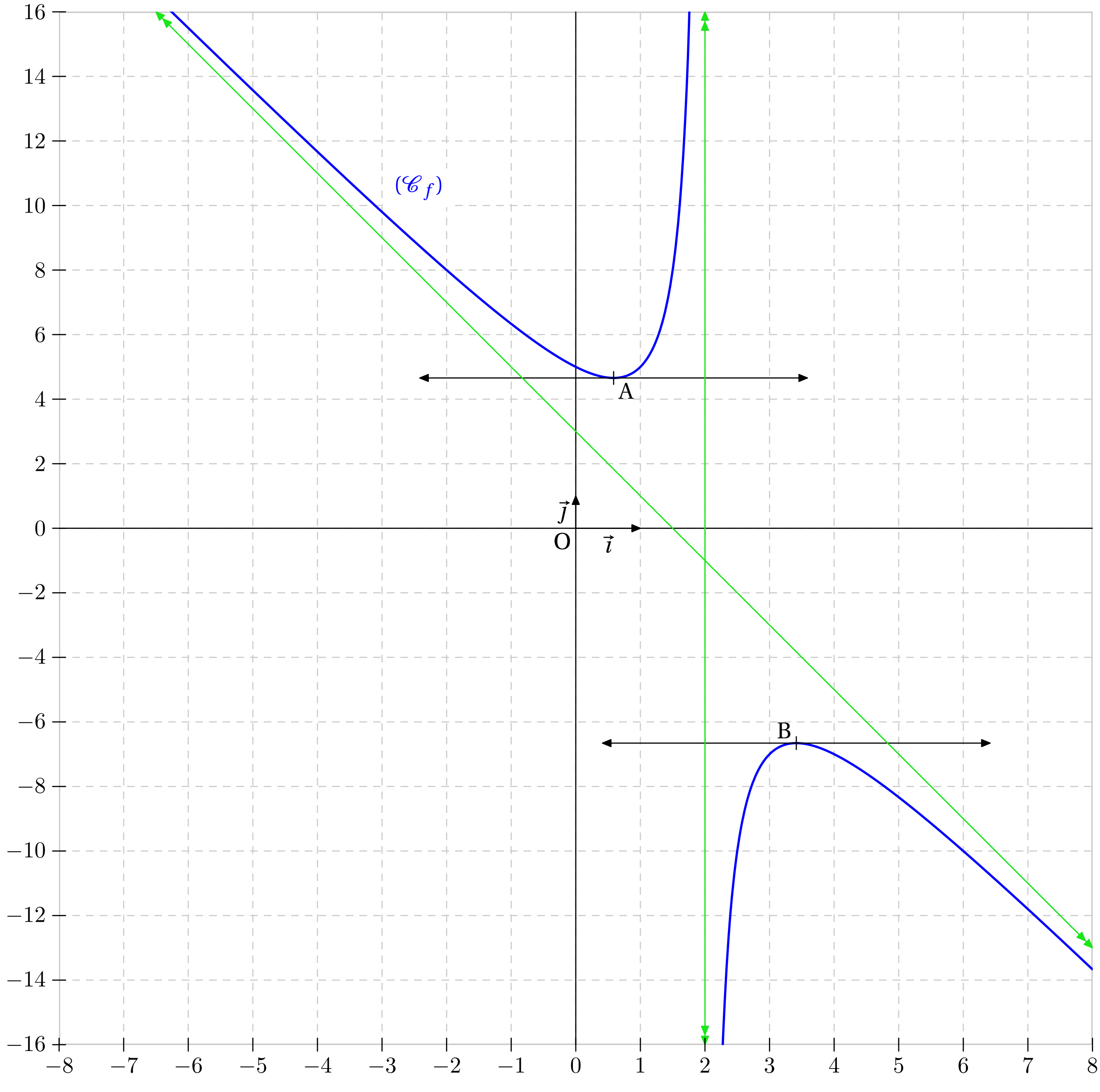


Exercice 5

Étudier le plus finement possible la fonction g définie par :

$$g(x) = -2x + 3 - \frac{4}{x-2}.$$

Illustration



Exercice 6

1) Représenter dans un même repère orthonormal sur l'intervalle $[-4\ ;\ 3]$.

— la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)^2$,

— la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 5x + 10$.

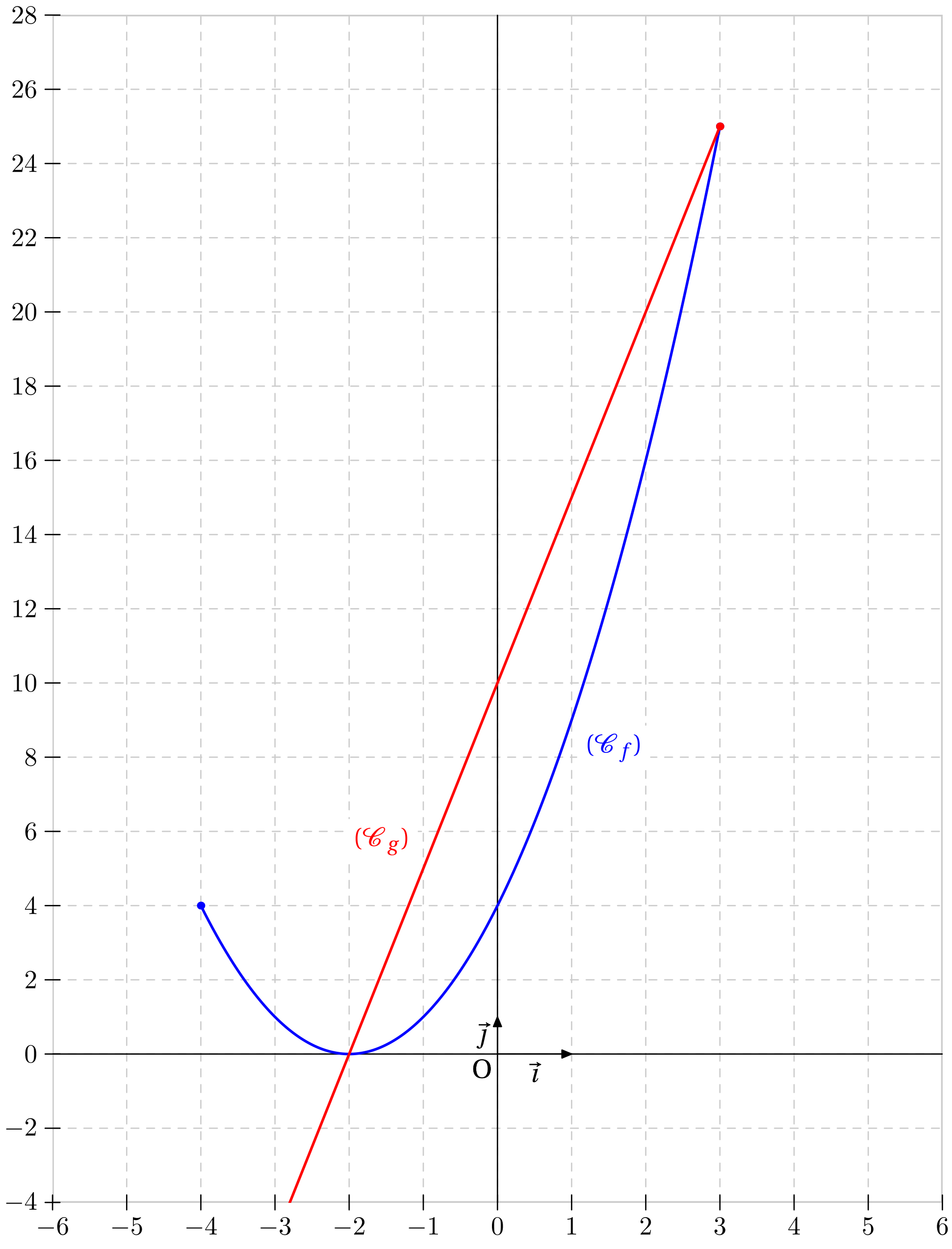
2) Utiliser ces représentations graphiques pour résoudre graphiquement :

a) l'équation $(x+2)^2 = 5x + 10$;

b) l'inéquation $(x+2)^2 \leqslant 5x + 10$.

3) Retrouver les résultats précédents par le calcul.

Illustration



Exercice 7

1) **a)** Résoudre l'équation : $x^2 + 2x - 2 = 0$.

b) A l'aide d'un tableau, étudier le signe de $x^2 + 2x - 2$ suivant les valeurs de x.

2) Soit la fonction f définie sur l'intervalle $I = [-4\ ;\ 4]$ par : $f(x) = \dfrac{2x+2}{x^2+2}$.

Montrer que $f'(x) = \dfrac{-2x^2 - 4x + 4}{(x^2+2)^2}$.

3) A l'aide de la première question, dresser un tableau de variation de f sur I.

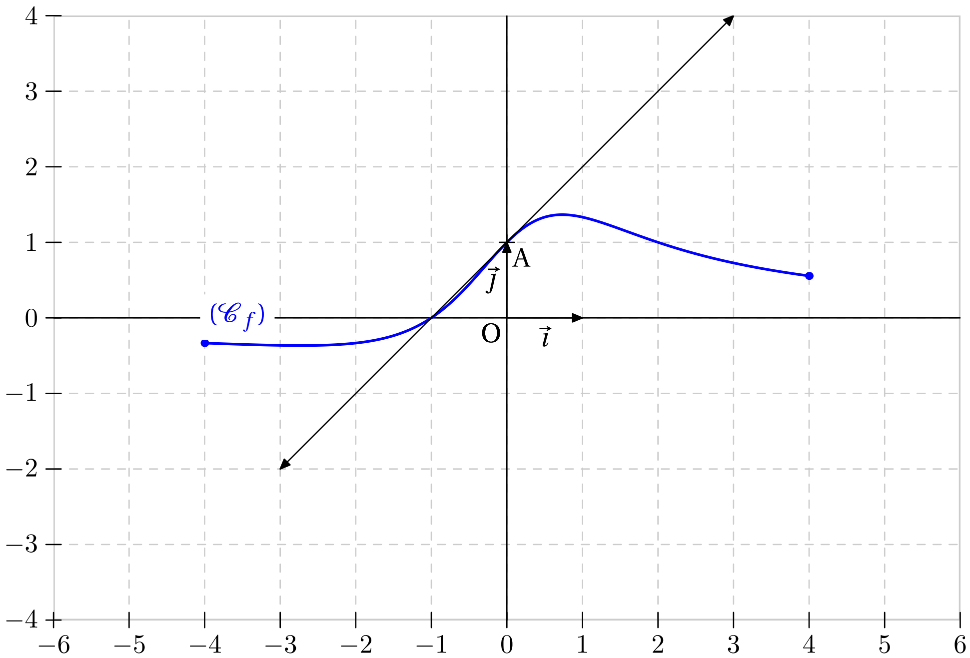
4) Tracer la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$ de f sur I.

5) Quelles sont la plus grande valeur et la plus petite valeur prises par f sur I ?

6) **a)** Trouver une équation de la tangente T au point A d'abscisse $x_A = 0$ à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

b) Étudier les positions relatives de $(\mathcal{C}_f)$ et (T).

Illustration



Exercice 8

Soit la fonction f définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par $\quad g(x) = \dfrac{3x+1}{x+2}$.

On appellera $(\mathcal{C}_g)$ sa courbe représentative.

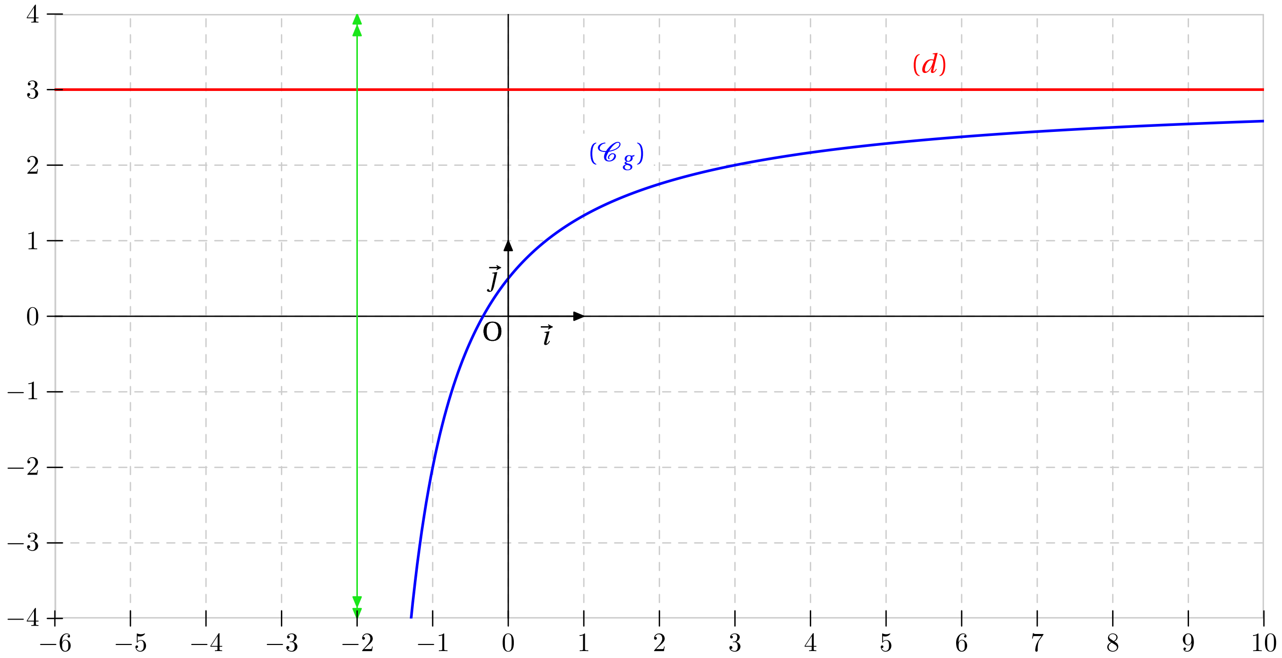
1) Calculer la dérivée $g'(x)$ de g et étudier le sens de variation de g.

2) **a)** Étudier la limite de g en $+\infty$ et en déduire l'existence d'une asymptote (d) dont on donnera l'équation.

b) Étudier les positions relatives de $(\mathcal{C}_g)$ et (d).

3) Donner le tableau de variation complet de la fonction g ainsi qu'un croquis illustrant les résultats précédemment trouvés.

Illustration



Exercice 9

Soit la fonction f définie sur $]-\infty\ ;\ 2[$ par

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$$

1) Étudier la limite en 2 de f. En déduire une interprétation graphique.

2) Étudier la limite en $-\infty$ de $f(x)$.

3) **a)** Démontrer que pour tout $x < 2$

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{x - 2}$$

b) Étudier la limite en $-\infty$ de $(f(x) - (x - 2))$ et en déduire l'existence d'une asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ représentative de la fonction f.

4) Montrer que

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}.$$

5) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty\ ;\ 2[$.

6) $(\mathcal{C}_f)$ admet-elle des tangentes horizontales ? Si oui, préciser.

7) En déduire les variations de f sur $]-\infty; 2[$.

8) Donner le tableau de variation complet de f sur $]-\infty\ ;\ 2[$.

9) Déterminer l'équation de la tangente (T_A) à $(\mathcal{C}_f)$ au point A d'abscisse $x_A = 0$.

10) Tracer dans un même repère $(O\ ; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal $(\mathcal{C}_f)$, les tangentes et les asymptotes à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

11) **a)** Résoudre graphiquement sur $]-\infty\ ;\ 2[$ l'équation : $f(x) = 0$.

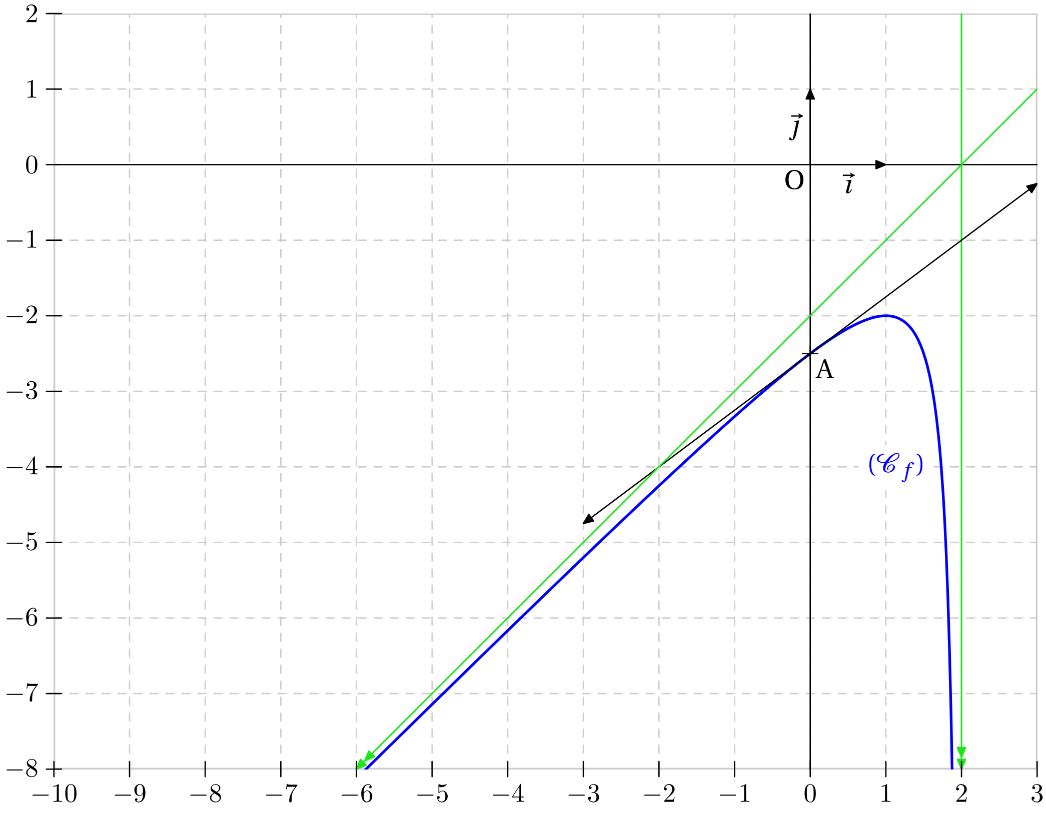
b) Résoudre sur $]-\infty\ ;\ 2[\ \cup\ ]2\ ;\ +\infty[$ l'équation : $f(x) = 0$.

12) **a)** Résoudre graphiquement sur $]-\infty\ ;\ 2[$ l'inéquation : $f(x) \leqslant 0$.

b) Résoudre sur $]-\infty\ ;\ 2[\ \cup\ ]2\ ;\ +\infty[$ l'inéquation : $f(x) \leqslant 0$.

NB : on prendra soin de construire un graphique aussi propre et complet que possible.

Illustration



$\vec{j}$
O
$\vec{i}$
A
$(\mathscr{C}_f)$
-10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3
2 1 0 -1 -2 -3 -4 -5 -6 -7 -8

Exercice 10

Soit la fonction g définie par : $g(x) = x - 5 + \dfrac{4}{x-1}$.

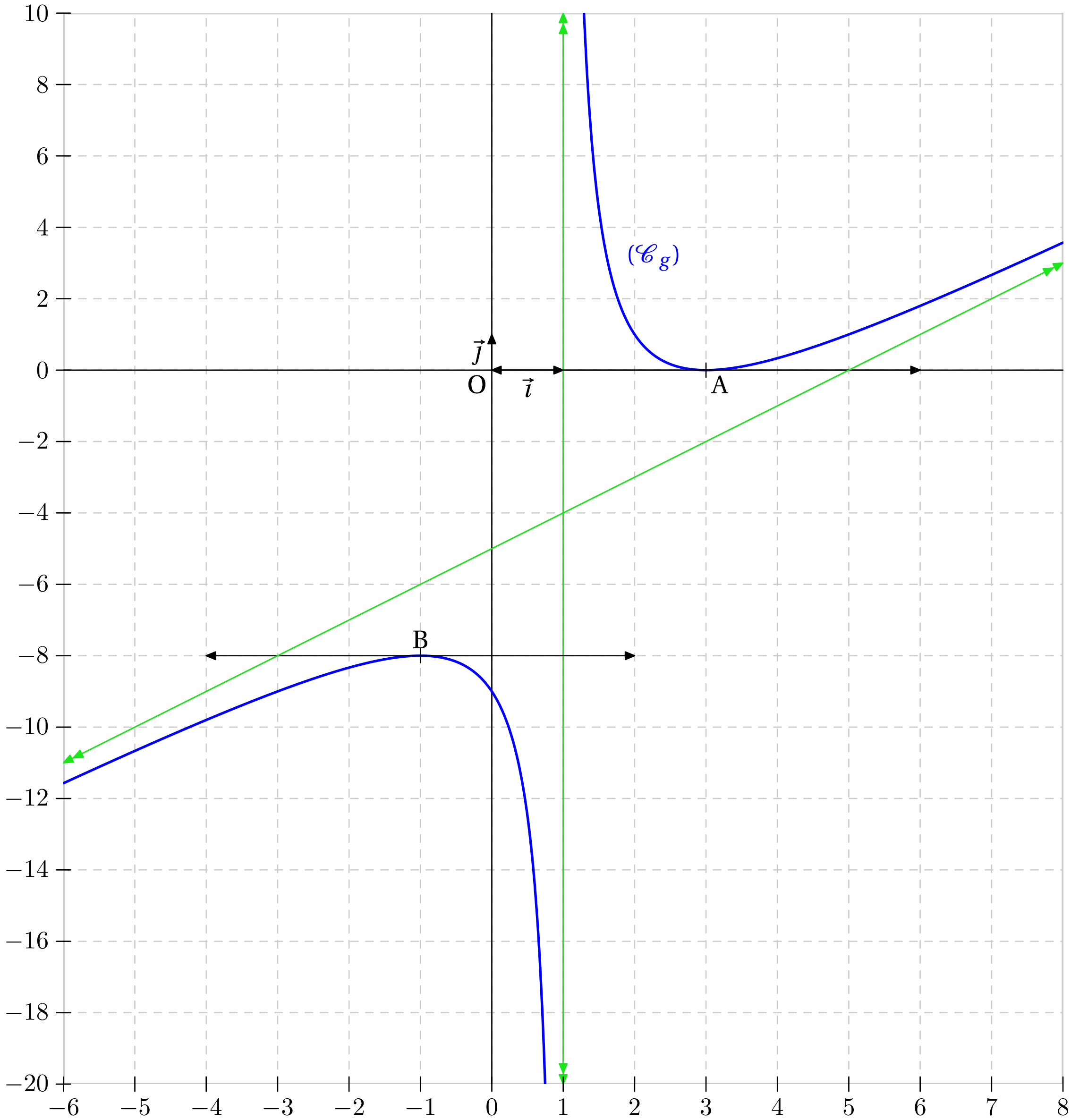
1) Quelle est la valeur interdite de cette fonction ?

2) Calculer sa dérivée $g'(x)$.

3) En déduire les variations de la fonction g.

4) Déterminer une équation de la tangente (T_A) au point A d'abscisse $x_A = 3$.

Illustration



Exercice 11

Dans chacun des cas suivants,

— tracer l'allure de la courbe, après avoir utilisé la calculatrice ;

— déterminer si une factorisation en produits de facteurs du premier degré existe, en justifiant à l'aide du graphique précédent ;

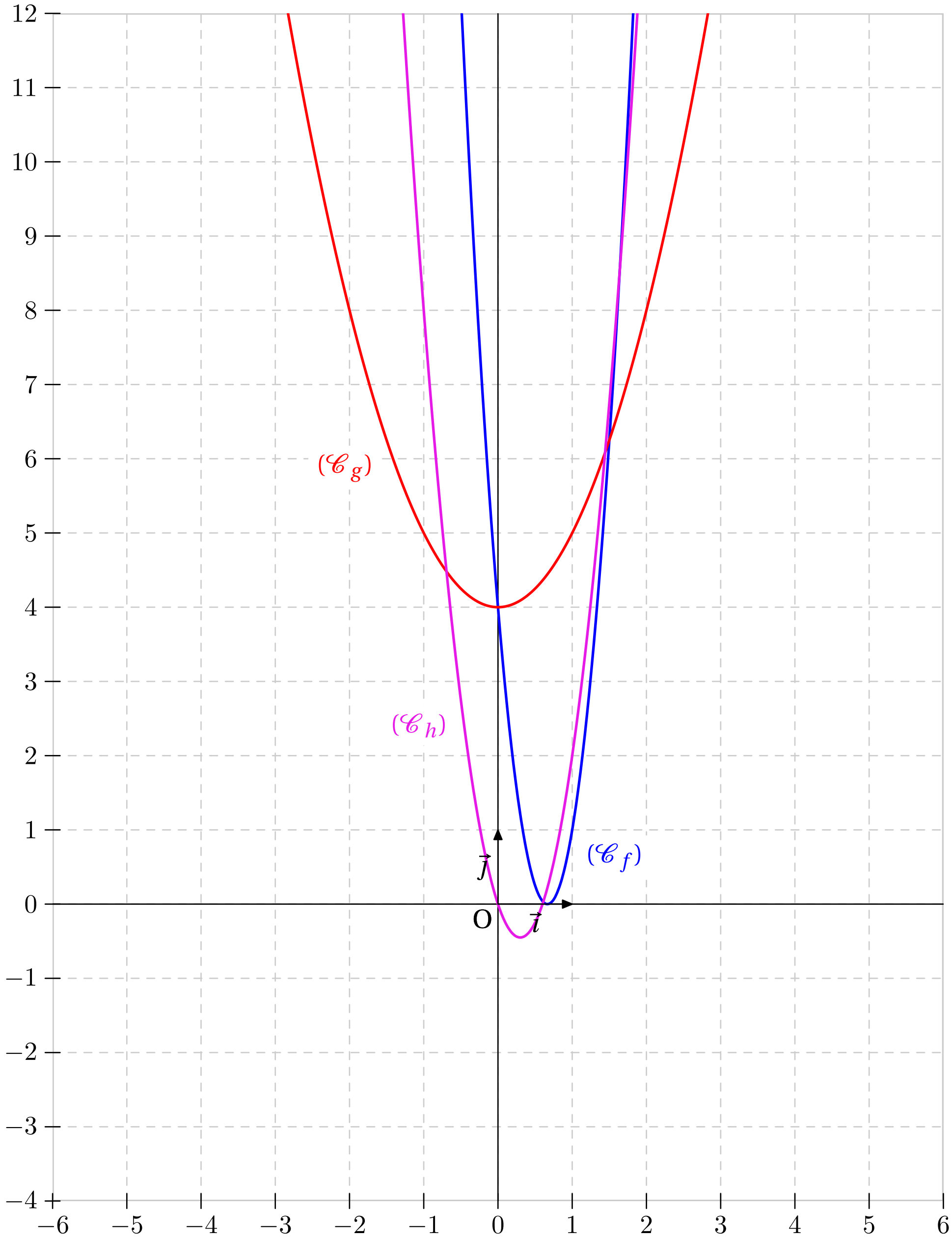
— donner si elle existe cette factorisation.

1) $f(x) = 9x^2 - 12x + 4$.

2) $g(x) = x^2 + 4$.

3) $h(x) = 5x^2 - 3x$.

Illustration



Exercice 12

Soit $f(x) = (2x-3)^2 - 5(x+5)(-4x+6)$.

1) Développer $f(x)$.

2) Factoriser $f(x)$.

3) Calculer $f(\sqrt{2})$, $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$ et $f(0)$. On choisira l'expression de $f(x)$ la plus appropriée.

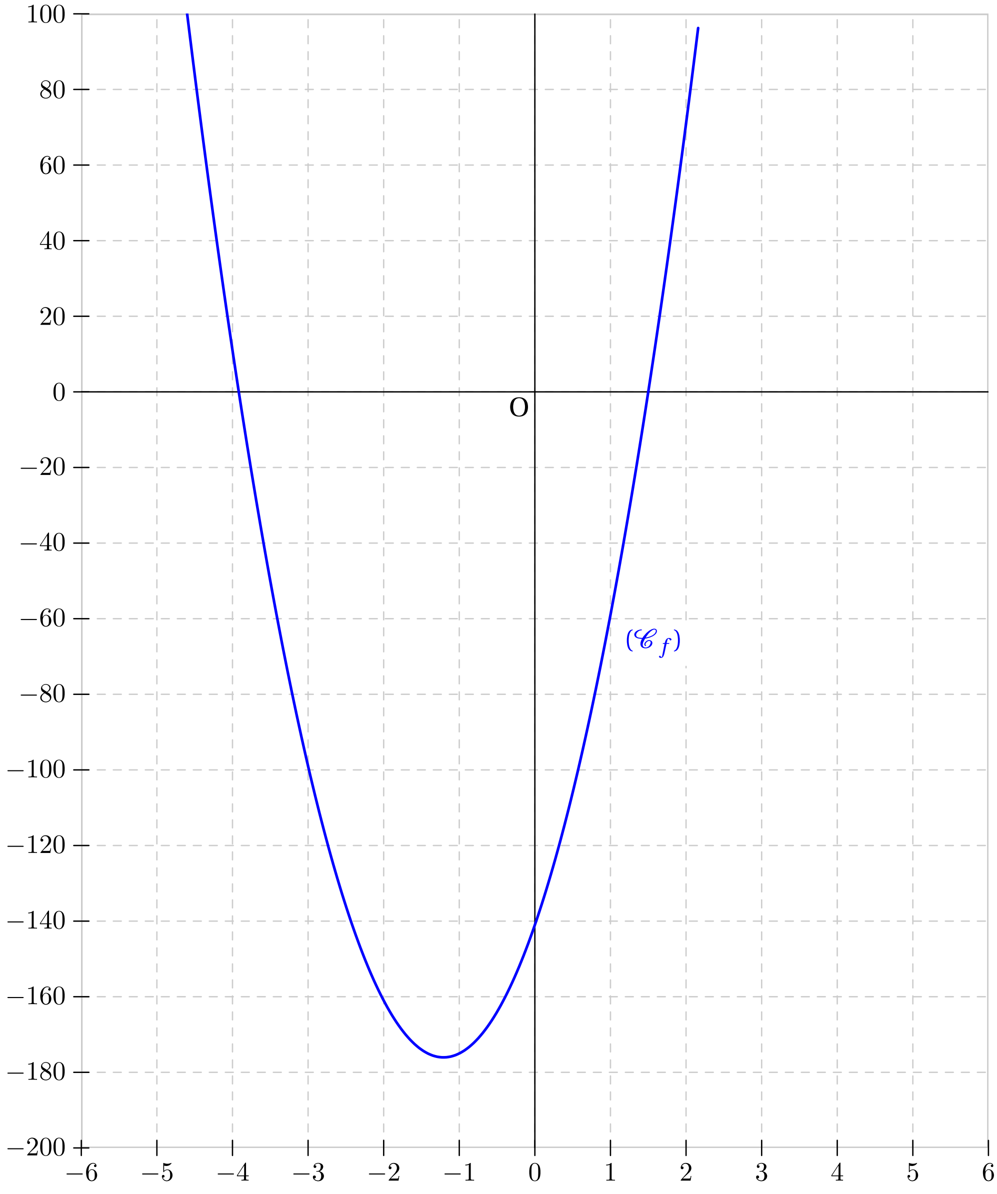
4) Résoudre les équations suivantes en prenant l'expression de $f(x)$ la plus adaptée :

a) $f(x) = -141$;

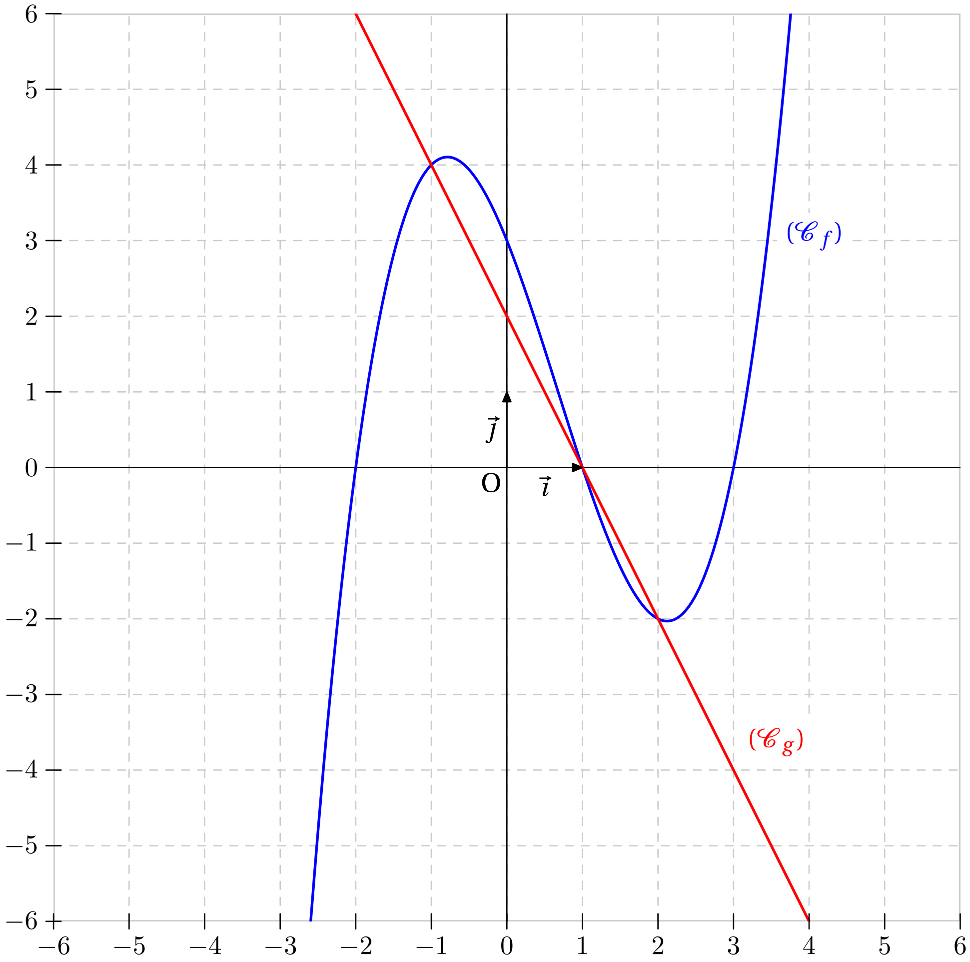
b) $f(x) = 0$;

c) $f(x) = 58x - 93$.

Illustration



Exercice 13



Résoudre graphiquement, en justifiant aussi précisément que possible, en donnant si besoin les valeurs approchées au dixième :

1) l'équation $f(x) = 0$;

2) l'équation $f(x) = 2$;

3) l'équation $f(x) = g(x)$;

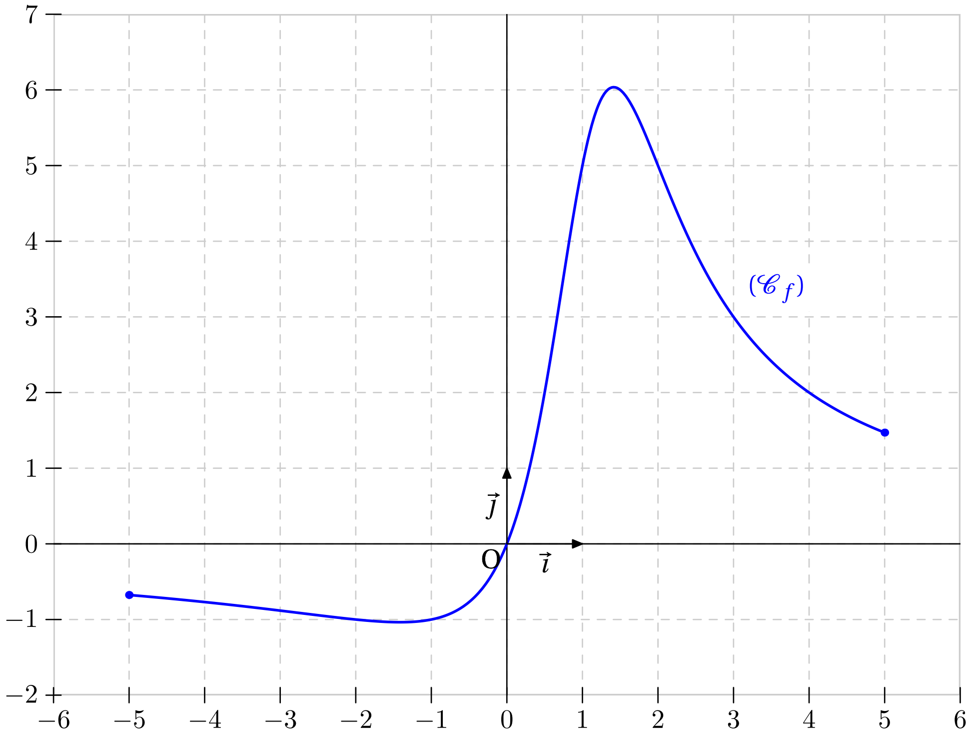
4) l'inéquation $f(x) \leqslant 0$.

5) le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} y = f(x) \\ y = g(x) \end{array} \right.$$

Exercice 14

Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-5\ ;\ 5]$.



Les réponses seront données à $0,1$ près.

1) Déterminer graphiquement l'image de 1 et celle de -3.

2) **a)** Déterminer les antécédents de 3.

b) Donner un réel

— ayant un seul antécédent ;

— n'ayant aucun antécédent.

3) **a)** Quel est le maximum atteint par la fonction f ? En quelle valeur est-il atteint ?

b) Quel est le minimum atteint par la fonction f ? En quelle valeur est-il atteint ?

4) Résoudre graphiquement, en justifiant clairement chaque réponse et en complétant la figure :

a) l'équation $f(x) = 3$;

b) l'équation $f(x) = 5$;

c) l'inéquation $f(x) > 5$;

d) l'inéquation $f(x) < 3$;

e) l'équation $f(x) = x$.

5) Donner le tableau de variations de la fonction f.

6) Parmi les fonctions suivantes, laquelle est selon vous la fonction f ? Justifier par des calculs.

a) $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$;

b) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1} + 3,5$;

c) $x \mapsto \dfrac{5x}{x^2-2x+2}$;

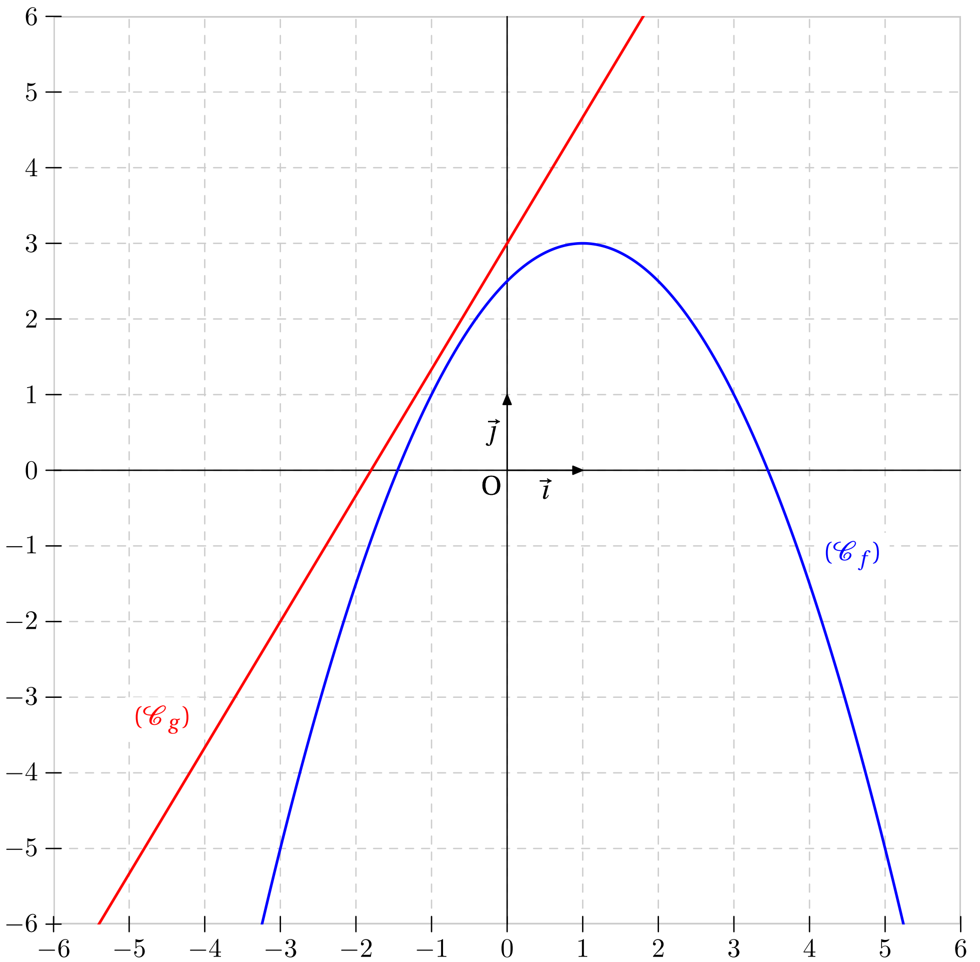
d) $x \mapsto \dfrac{5x}{x-1}$.

Exercice 15

Dans un repère orthonormal d'unités $1\ cm$, tracer la parabole $(\mathcal{C}_f)$ d'équation $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{5}{2}$ et la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = \frac{5}{3}x + 3$.

Démontrer algébriquement que $(\mathcal{D})$ ne coupe pas $(\mathcal{C}_f)$.

Illustration



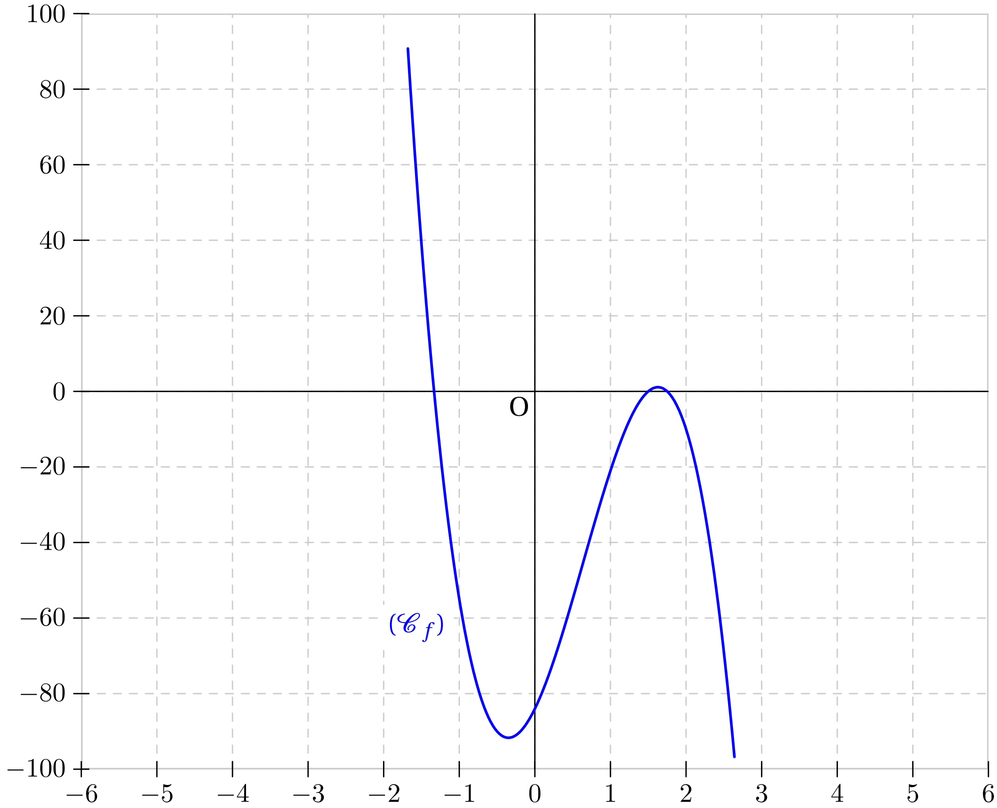
Exercice 16

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -24x^3 + 46x^2 + 41x - 84$.

1) Déterminer les coefficients a, b et c tels que : $f(x) = (2x-3)(ax^2 + bx - c)$.

2) Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant 0$.

Illustration



Exercice 17

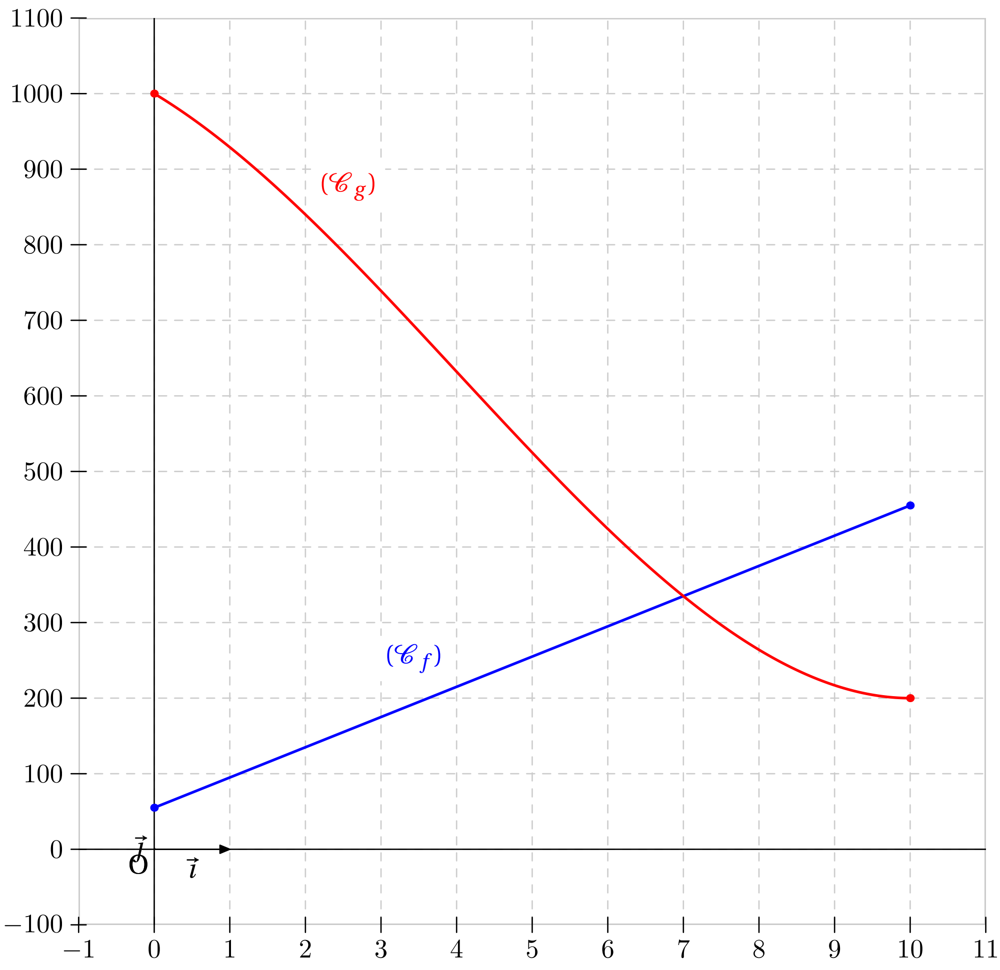
L'offre et la demande d'un produit sont modélisées par deux fonctions f et g, pour un prix au kg variant de 0 à 10 €. Les quantités offertes $f(x)$ et les quantités demandées $g(x)$ sont exprimées en tonnes.

1) La fonction d'offre est une fonction affine telle que :
$f(7) = 335$ et $f(9) = 415$.
Déterminer $f(x)$.

2) La fonction de demande est donnée par $g(x) = x^3 - 12x^2 - 60x + 1000$.
Démontrer que la fonction de demande est décroissante sur $[0\ ;\ 10]$.

3) Visualiser les deux courbes d'offre et de demande à la calculatrice.
Quel semble être le point d'intersection des deux courbes ? Le vérifier par un calcul d'images, sans chercher à résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.
En déduire le prix d'équilibre et la quantité d'équilibre, ainsi que le chiffre d'affaires engendré par la vente de ce produit à l'équilibre.

Illustration



Exercice 18

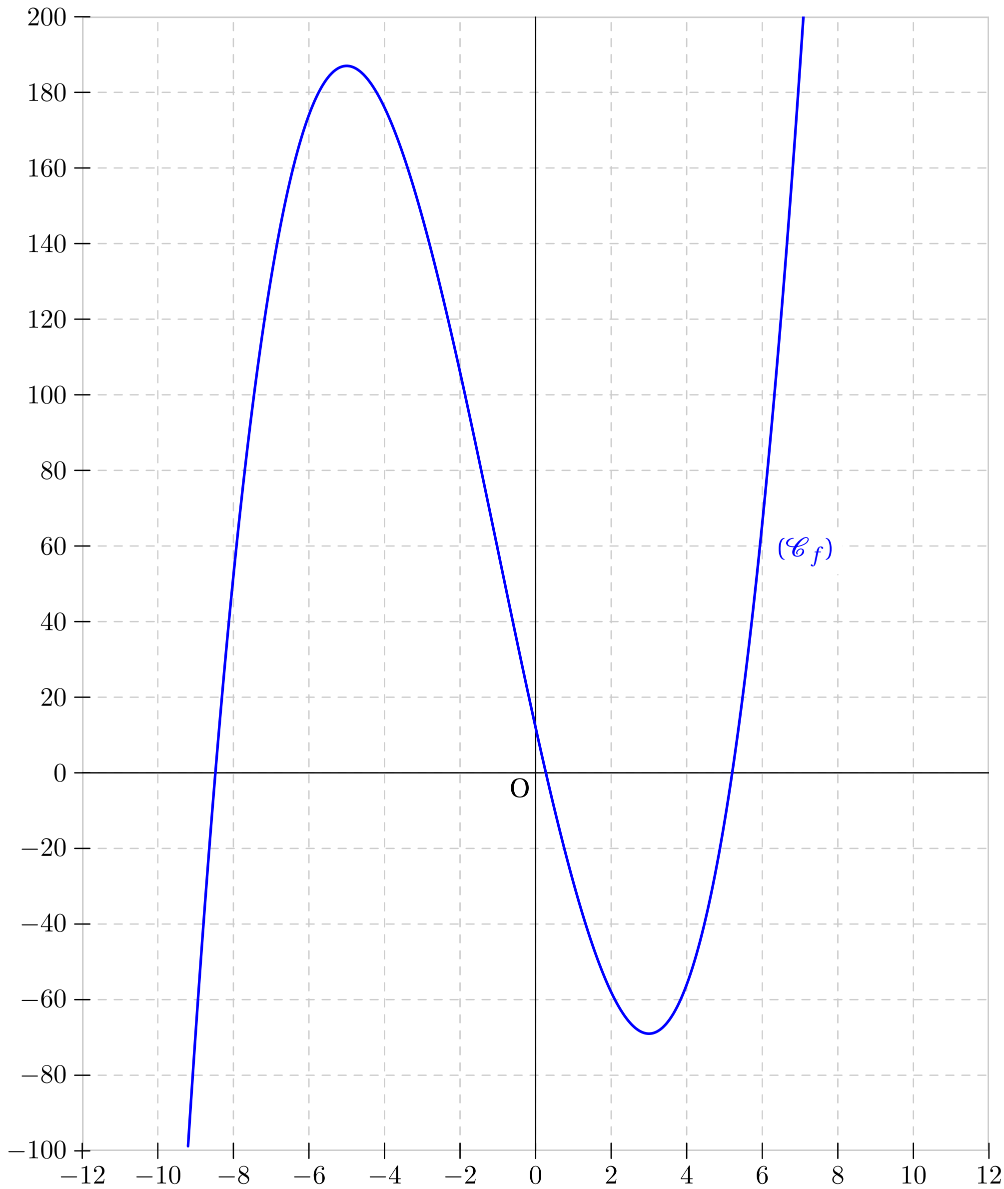
Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3 + 3x^2 - 45x + 12$.
Donner le tableau de variations de f sur l'intervalle $[-10\ ;\ 10]$.

NB : ne pas oublier de calculer les valeurs particulières du tableau.

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3 + 3x^2 - 45x + 12$.
Donner le tableau de variations de f sur l'intervalle $[-10\ ;\ 10]$.

NB : ne pas oublier de calculer les valeurs particulières du tableau.

Illustration



Exercice 19

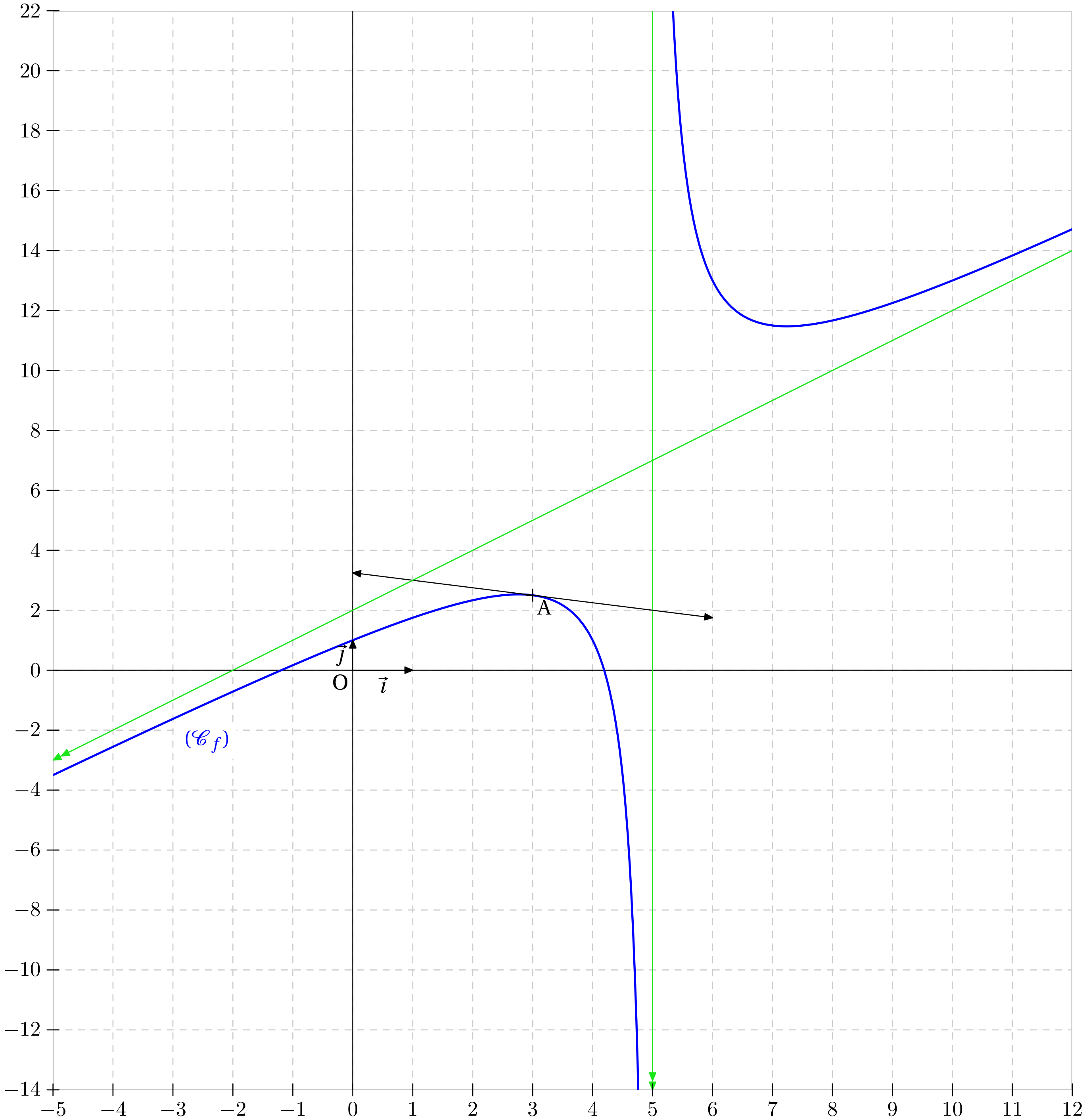
Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ par : $g(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 5}{x - 5}$.

1) Calculer $g'(x)$.

2) Étudier les variations de g sur $\mathbb{R} \setminus \{5\}$.

3) Déterminer une équation de la tangente (Δ) au point F d'abscisse 3.

Illustration



Exercice 20

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2$.
On appelle $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative.

1) Calculer $f'(x)$, étudier son signe et en déduire le tableau de variations de la fonction f.
Préciser la valeurs des extrema locaux.

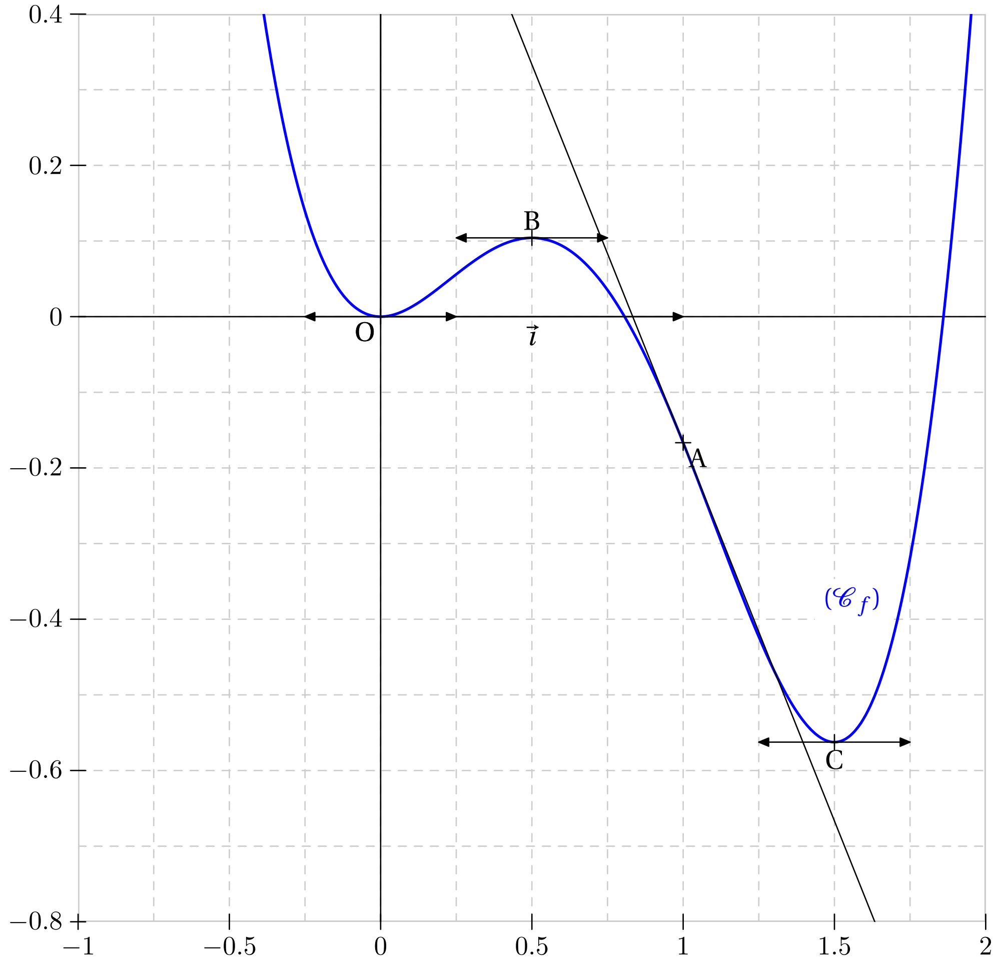
2) Visualiser la courbe à la calculatrice.
Quelle fenêtre choisir pour voir tous les changements de variation de la fonction f ?

3) **a)** Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
En donner une interprétation pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$.
On donnera la valeur approchée à 10^{-2} près de chaque solution.

b) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point A d'abscisse 1.

c) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthogonal d'unités $5\ cm$ pour 1 en abscisse et $10\ cm$ pour 1 en ordonnée.
On placera les tangentes horizontales et la tangente (T).

Illustration



Exercice 21

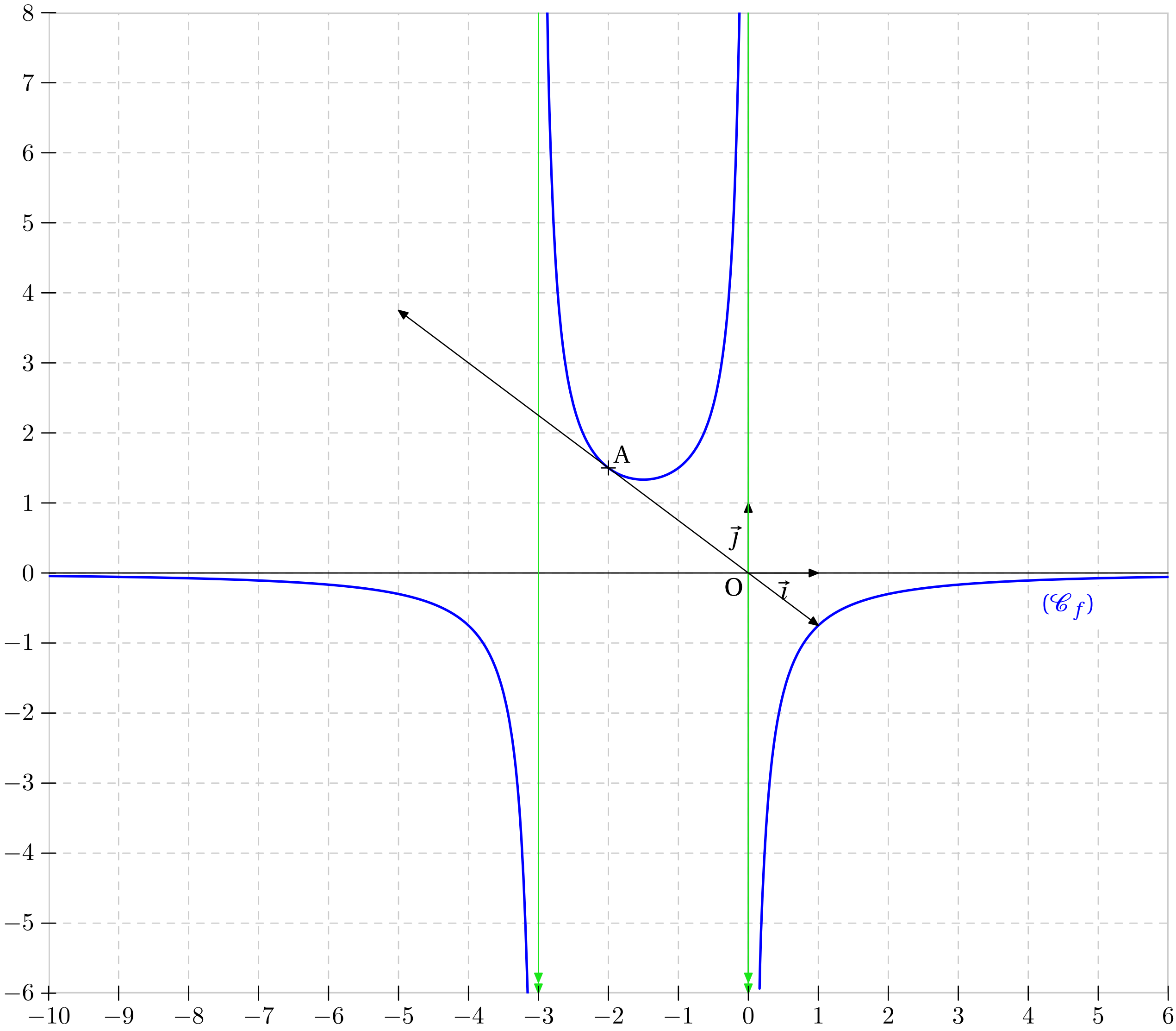
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-3\ ;\ 0\}$ par $\quad f(x) = \dfrac{1}{x+3} - \dfrac{1}{x}$.

1) Démontrer que la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse -2 passe par l'origine.

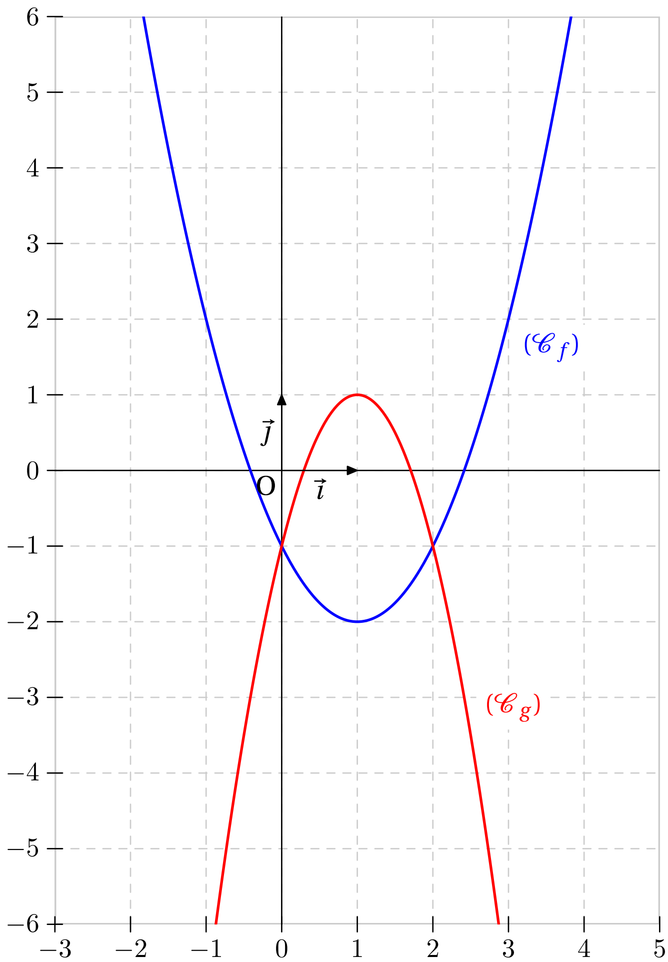
2) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (T) avec la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

3) Résoudre l'inéquation $f(x) + \dfrac{3}{4}x > 0$.
En déduire, suivant les valeurs de x, la position de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à la tangente (T).

Illustration



Exercice 22



Résoudre graphiquement, en justifiant aussi précisément que possible, en donnant si besoin les valeurs approchées au dixième :

1) l'équation $f(x) = 0$;

2) l'équation $f(x) = 2$;

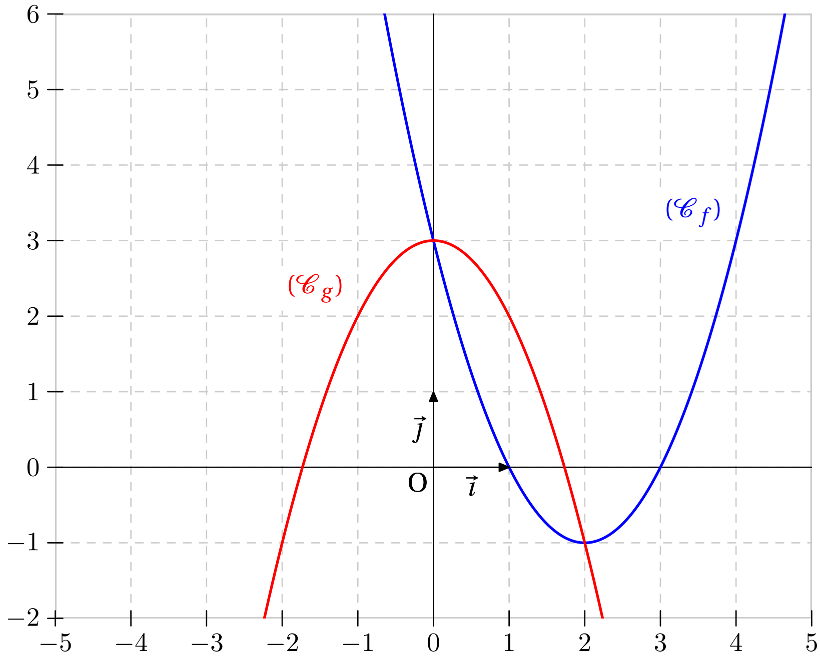
3) l'équation $f(x) = g(x)$;

4) l'inéquation $f(x) \leqslant 0$.

5) le système :
$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$

Exercice 23

Voici les paraboles $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ représentatives de deux fonctions f et g.



Répondre aux questions suivantes à l'aide du graphique, en rédigeant soigneusement les réponses.
Les réponses seront données à $0,1$ près.

1) Déterminer les antécédents de 2 pour la fonction g.

2) Déterminer l'image de 1 par la fonction g.

3) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

4) Résoudre l'inéquation $f(x) > 3$.

5) Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.

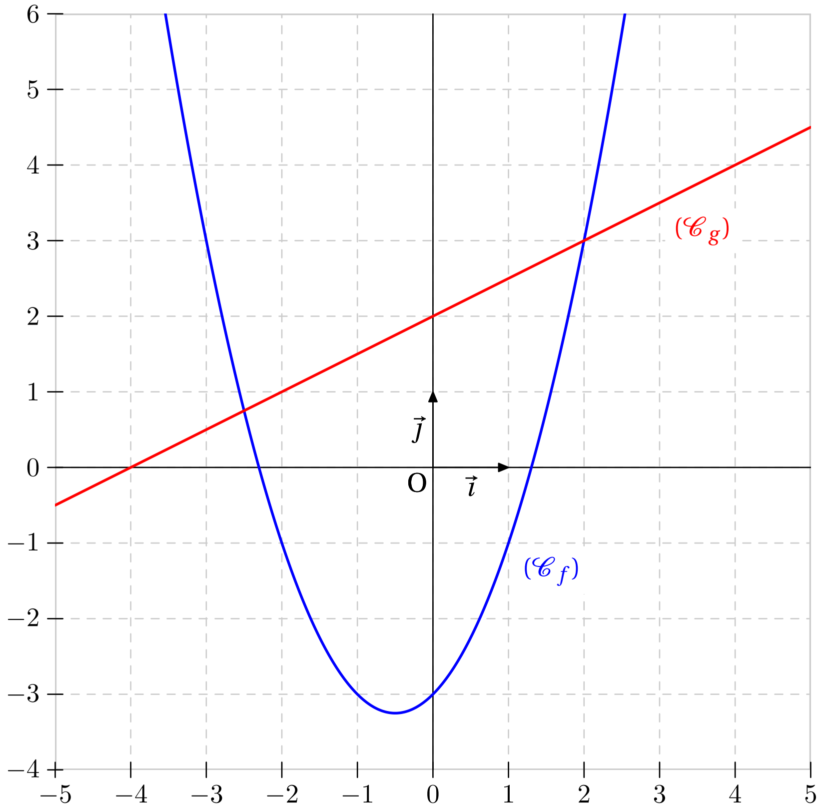
Exercice 24

Décomposer les fonctions suivantes à l'aide des fonctions usuelles.

- $f(x) = 2x^2 - 3$.
- $f(x) = -\sqrt{x} + 1$.
- $f(x) = \dfrac{1}{3x+8}$.

Exercice 25

Voici les paraboles $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ représentatives de deux fonctions f et g.



Partie A
Répondre aux questions suivantes à l'aide du graphique, en rédigeant soigneusement les réponses.
Les réponses seront données à $0,1$ près.

1) Déterminer les antécédents de -1 pour la fonction f.

2) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

3) Résoudre l'inéquation $f(x) < -2$.

4) Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.

Partie B
On donne $\quad f(x) = x^2 + x - 3 \quad$ et $\quad g(x) = \dfrac{1}{2}x + 2$.
Répondre aux questions suivantes algébriquement.

1) Résoudre l'équation $f(x) = 3$.

2) Résoudre l'inéquation $f(x) < g(x)$.

Exercice 26

1) Décomposer les fonctions suivantes à l'aide des fonctions usuelles.

- $f(x) = (x-1)^2$
- $f(x) = \dfrac{2}{x} + 5$

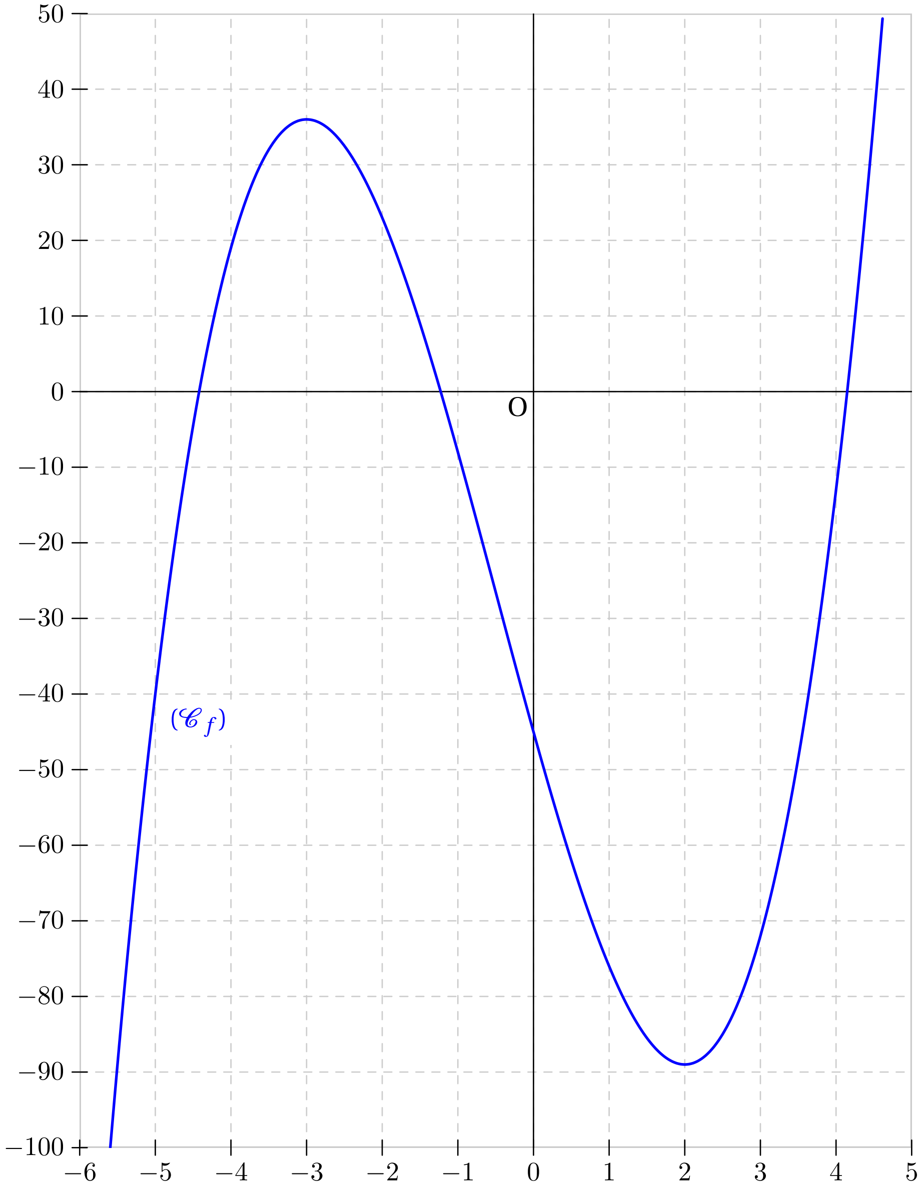
2) Déterminer l'image de x par « f suivie de g » sachant que $f(x) = x^2 + 4$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

Exercice 27

Soit la fonction f définie par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 45$.
Donner le tableau de variations de f sur l'intervalle $[-10\ ;\ 10]$.

NB : ne pas oublier de calculer les valeurs particulières du tableau.

Illustration



Exercice 28

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ par : $g(x) = \dfrac{x^2 - 5}{x+3}$.

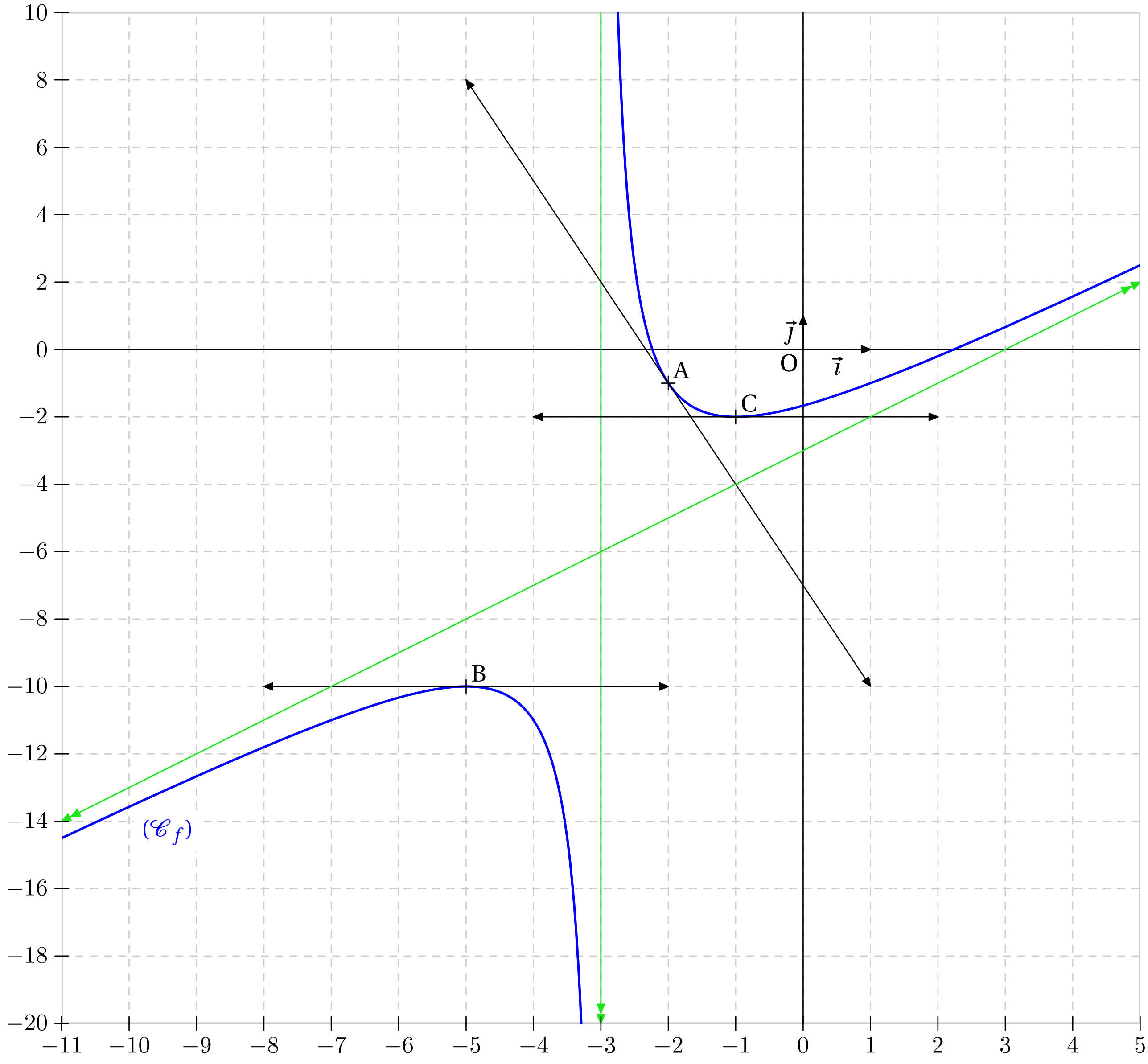
1) Montrer que $g'(x) = \dfrac{x^2 + 6x + 5}{(x+3)^2}$.

2) Étudier les variations de g sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

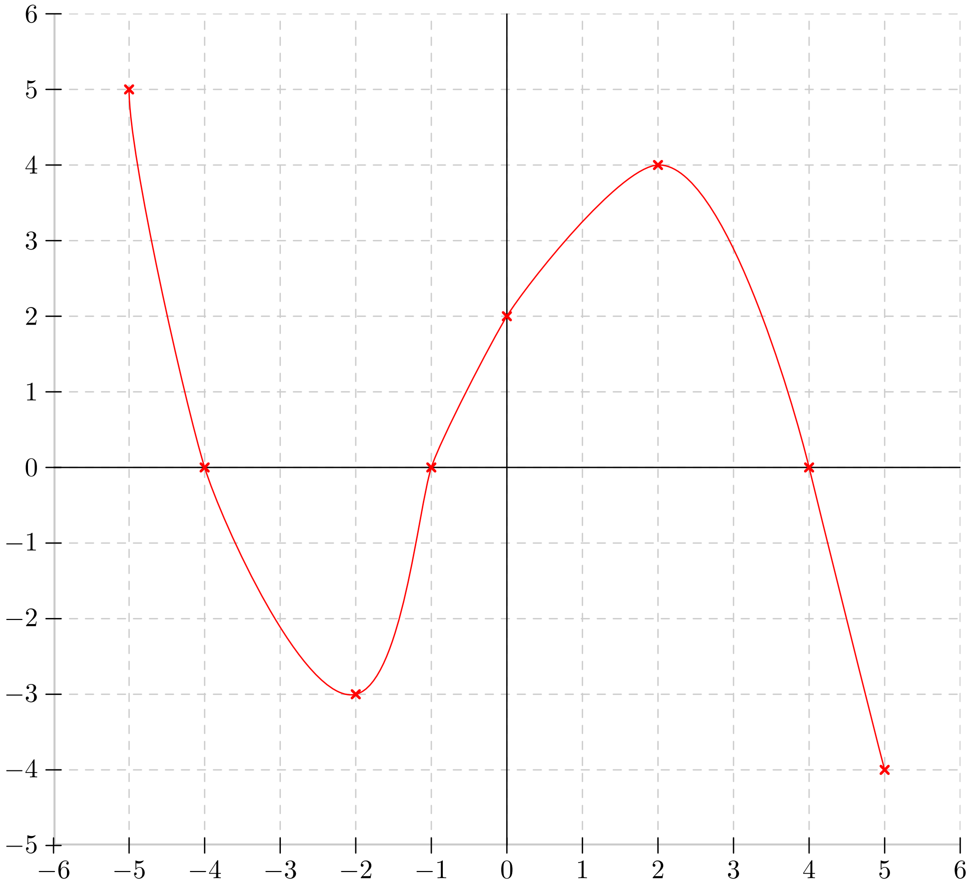
3) Déterminer une équation de la tangente (Δ) au point R d'abscisse -2.

4) Que peut-on dire de la tangente au point d'abscisse -5 ?

Illustration



Exercice 29



Donner le tableau de signes de $f'(x)$, dérivée de la fonction f dessinée sur le graphe ci-dessus sur l'intervalle $[-5\ ;\ 5]$.

Exercice 30

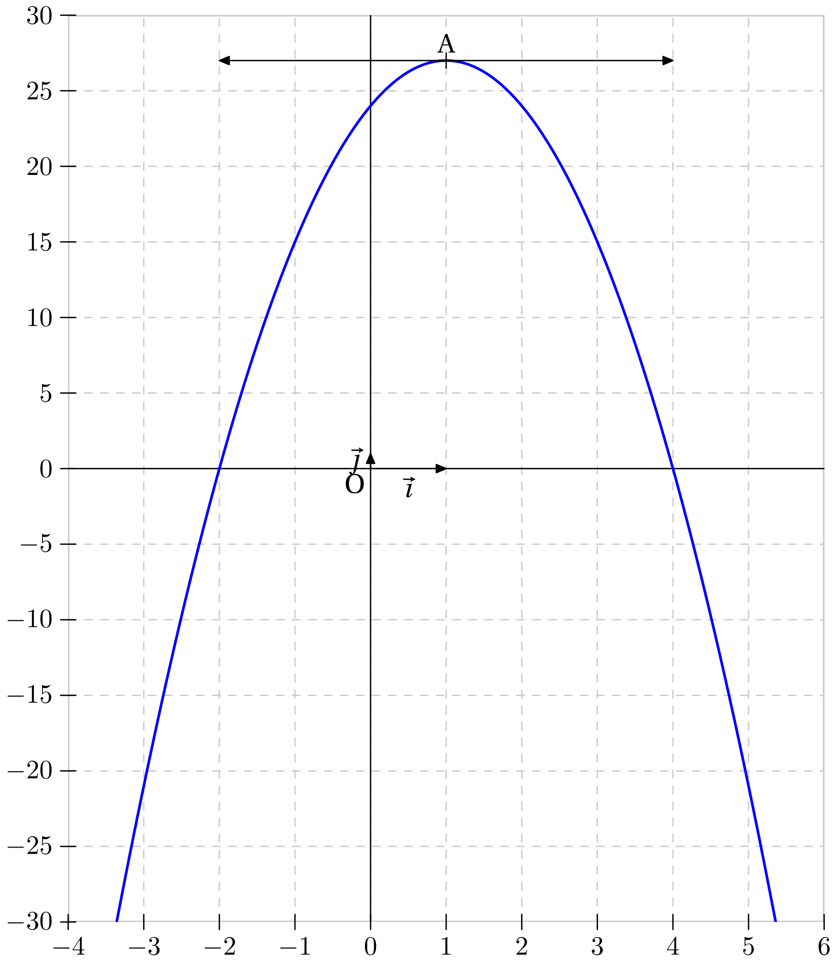
On donne la fonction h définie par $h(x) = -3(x+2)(x-4)$.

1) Donner le tableau de signes de $h(x)$.

2) Donner le tableau de variations d'une fonction H dont la dérivée soit h.

NB : il existe une infinité de fonctions H !

Illustration



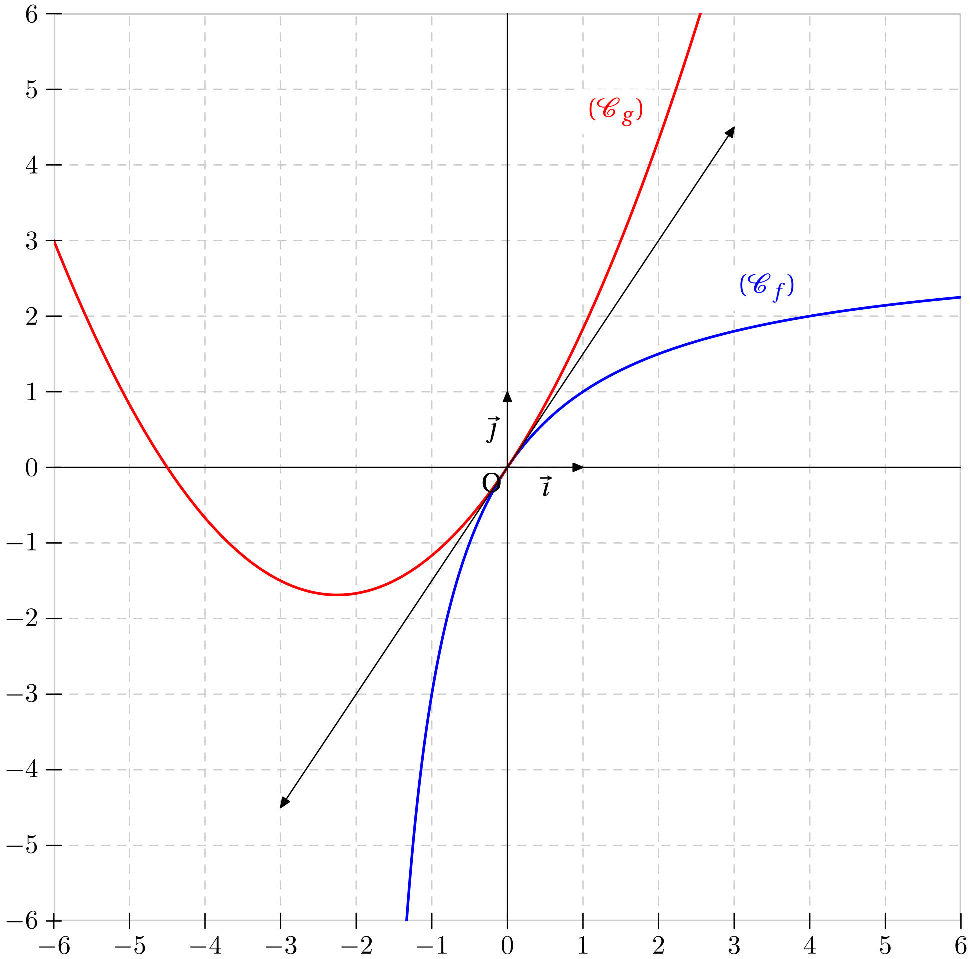
Exercice 31

Soit les fonctions f et g telles que :

- $f(x) = \dfrac{3x}{x+2}$ définie sur $]-2\,;\,+\infty[$;
- $g(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{3}{2}x$ définie sur $\mathbb{R}$.

Leurs courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ semblent être tangentes à l'origine.
Le démontrer.

Illustration



Exercice 32

Enoncé

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-7\ ;\ 7]$ par : $f(x) = \dfrac{8x+6}{x^2+1}$.

1) Expliquer pourquoi f est bien définie sur $[-7\ ;\ 7]$.

2) Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des abscisses.

3) Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des ordonnées.

4) Soit la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = -x + 6$. Déterminer (par le calcul) pour quelles valeurs de x la droite $(\mathcal{D})$ est située au dessus de $(\mathcal{C}_f)$.

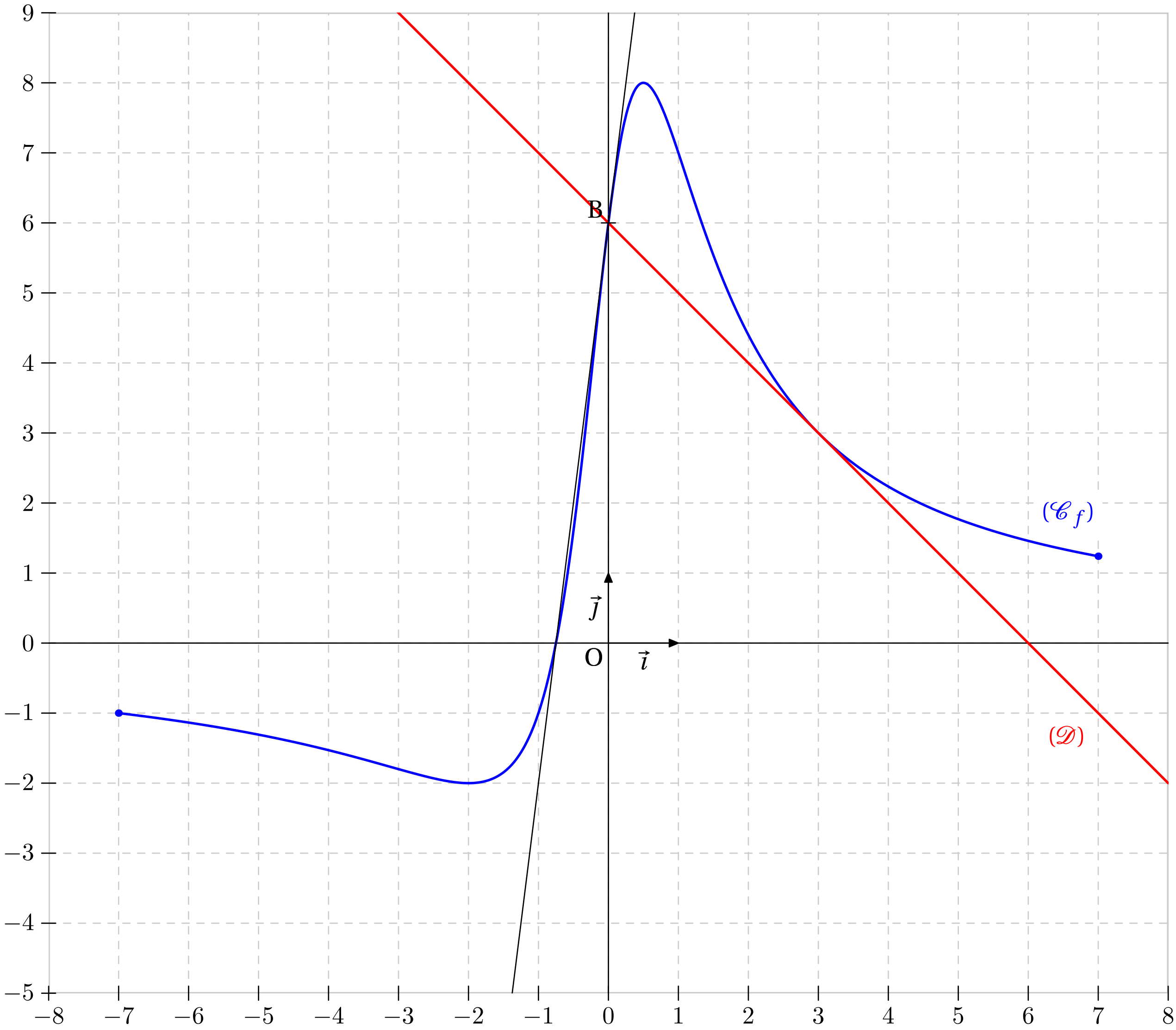
5) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{-4(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2}$.

6) Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de f sur $[-7\ ;\ 7]$.

7) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point B d'abscisse 0.

8) Tracer dans un repère les droites $(\mathcal{D})$, (T) et la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

Illustration



Exercice 33

Dans chacun des cas suivants,

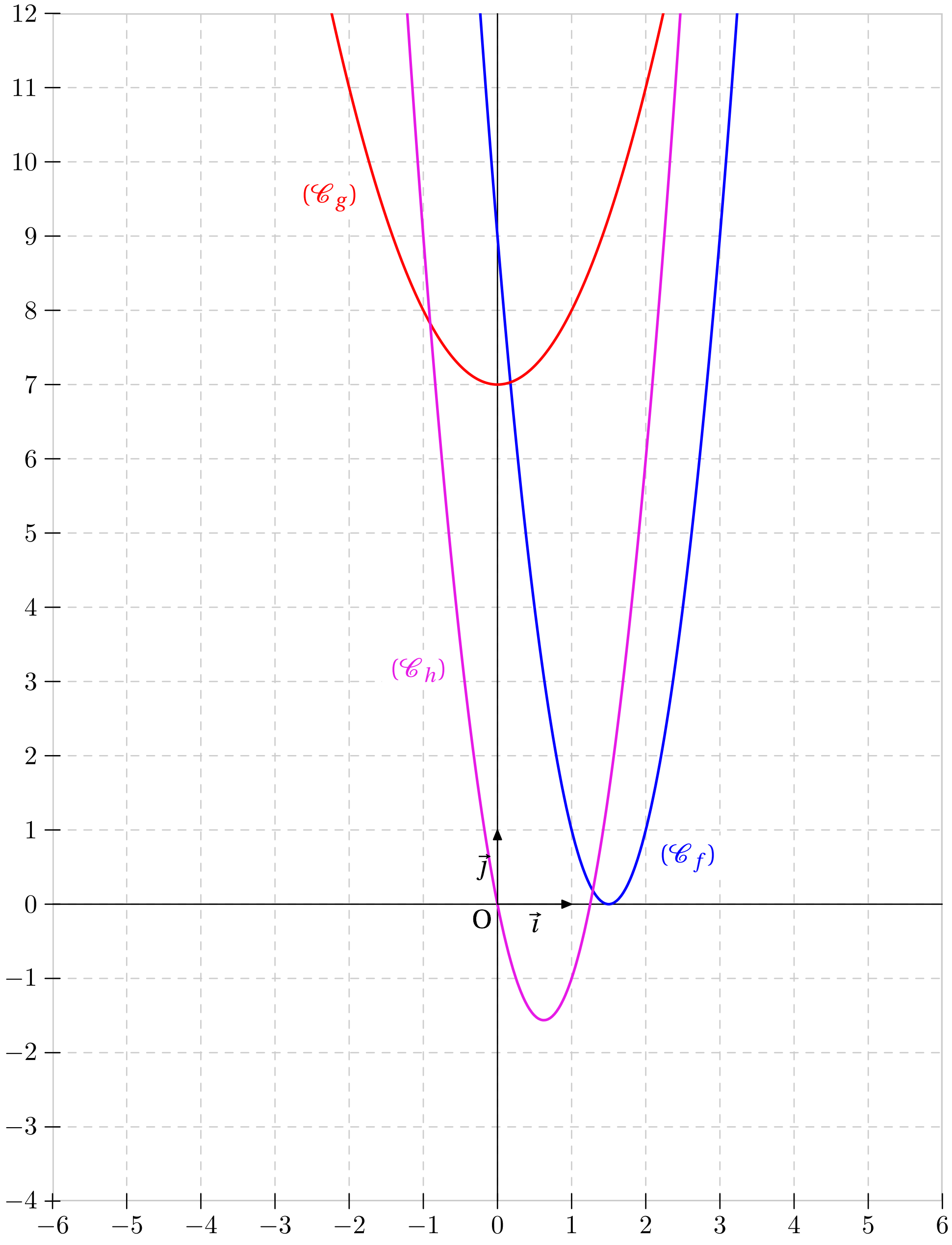
- Tracer l'allure de la courbe, après avoir utilisé la calculatrice ;
- Déterminer si une factorisation en produits de facteurs du premier degré existe, en justifiant à l'aide du graphique précédent ;
- Donner si elle existe cette factorisation (on n'utilisera pas ici le discriminant).

1) $f(x) = 4x^2 - 12x + 9$.

2) $g(x) = x^2 + 7$.

3) $h(x) = 4x^2 - 5x$.

Illustration



Exercice 34

Soit $f(x) = (2x+3)^2 - 5(x+5)(2x+3)$.

1) Développer $f(x)$.

2) Factoriser $f(x)$.

3) Calculer $f(\sqrt{2})$, $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)$ et $f(0)$. On choisira l'expression de $f(x)$ la plus appropriée.

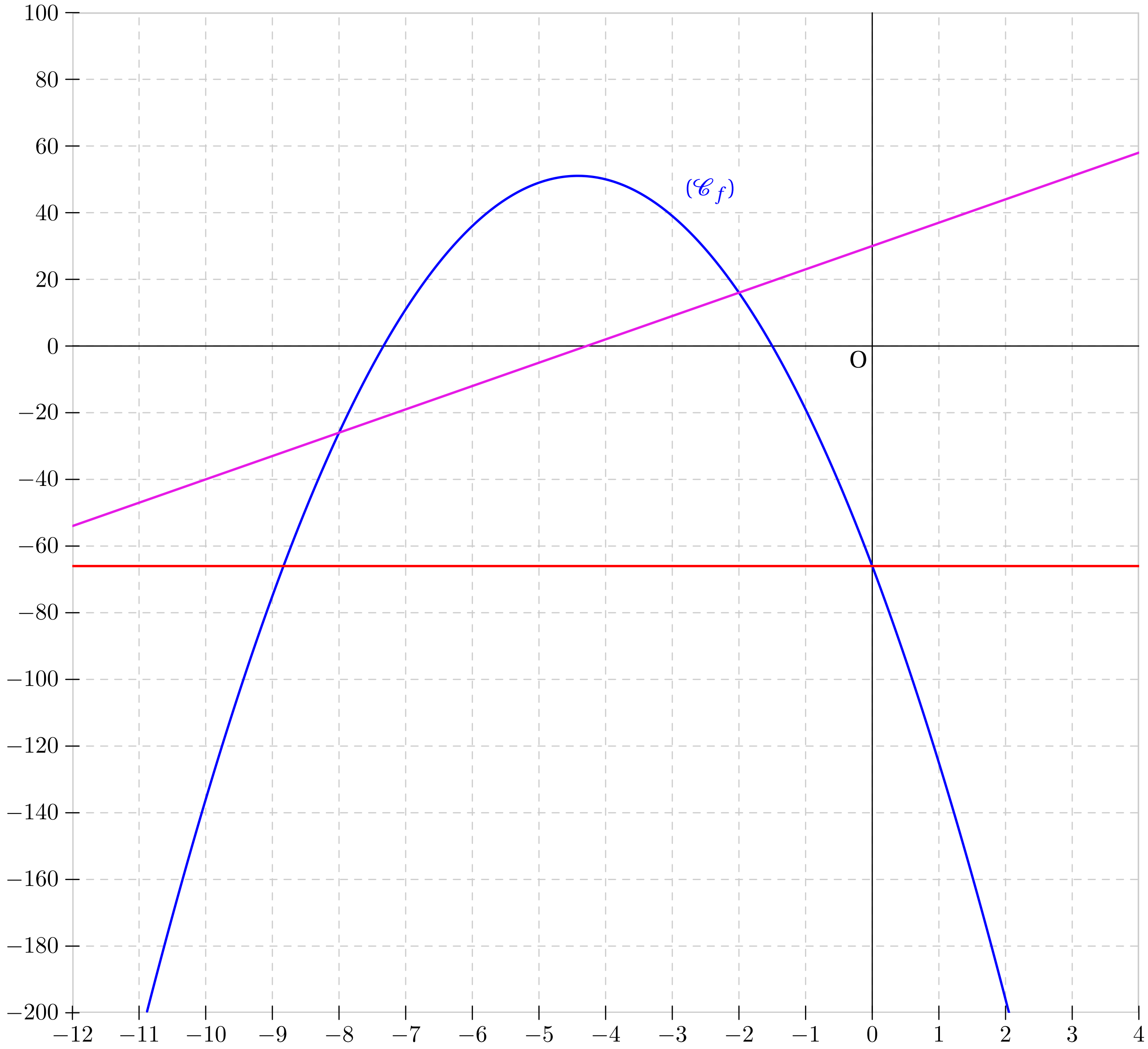
4) Résoudre les équations suivantes en prenant l'expression de $f(x)$ la plus adaptée :

a) $f(x) = -66$;

b) $f(x) = 0$;

c) $f(x) = 7x + 30$.

Illustration



Exercice 35

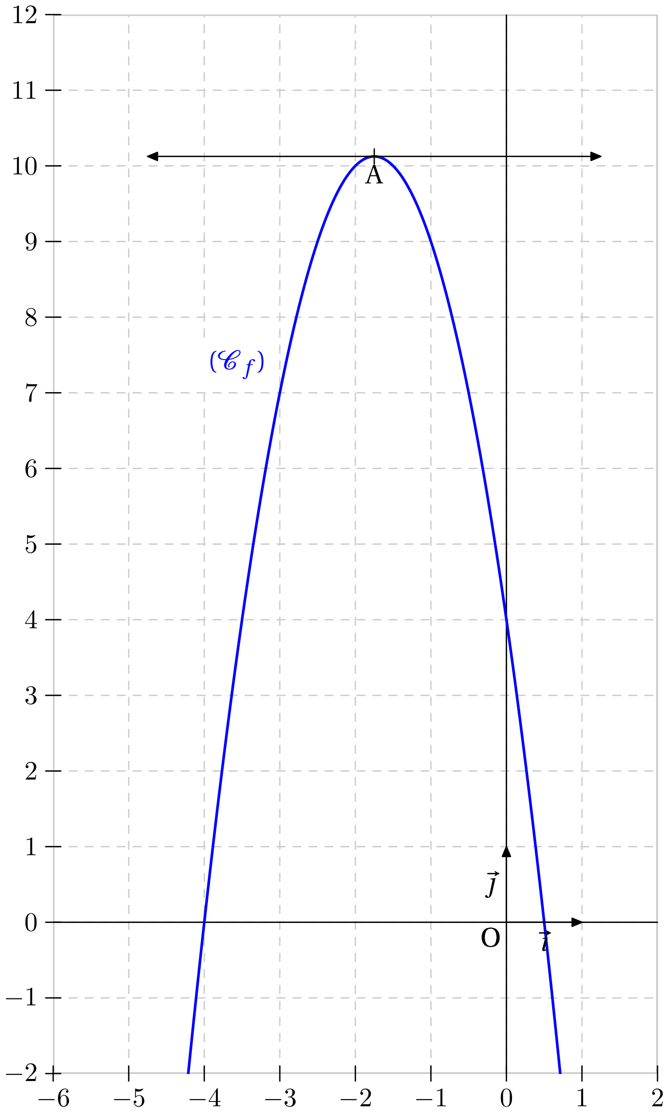
On donne : $f(x) = -2x^2 - 7x + 4$.

1) Calculer son discriminant.

2) $f(x)$ est-il factorisable ? Si oui, le factoriser.

3) Donner l'allure de sa courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ (sans utiliser la calculatrice).

Illustration



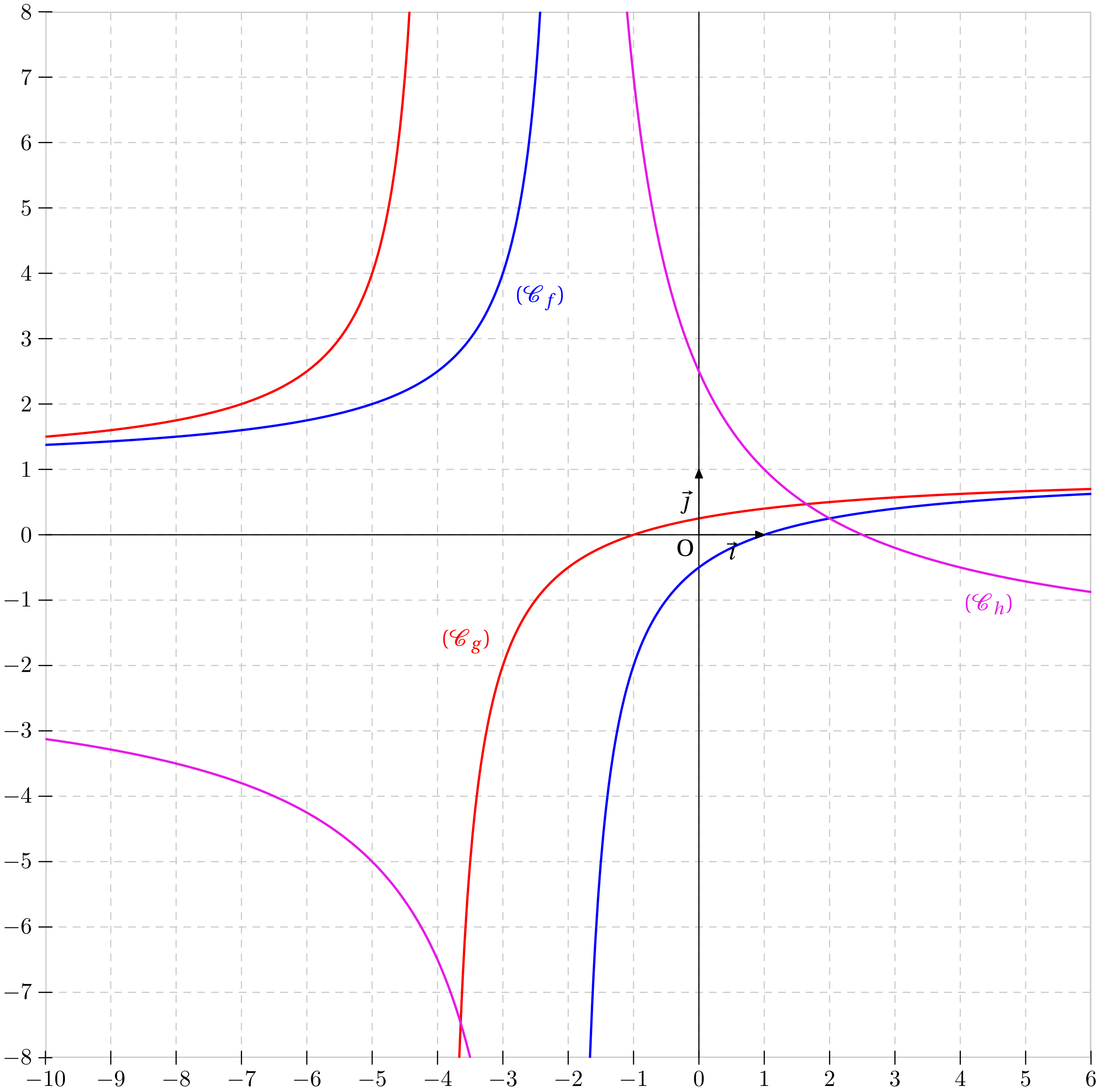
Exercice 36

On donne : $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$.

1) Calculer et simplifier : $g(x) = f(x+2)$.

2) Calculer et simplifier : $h(x) = -3f(x) + 1$.

Illustration



Exercice 37

Pour chacun des cas suivants, calculer $f[g(x)]$ et $g[f(x)]$:

1) $f(x) = 2x^2 - 1$ et $g(x) = 5x - 4$.

2) $f(x) = x^2 - 6$ et $g(x) = x^2 + 3$.

Exercice 38

Dans chacun des cas suivants, écrire f comme composée de deux fonctions et en déduire le sens de variation de f sur $]0\ ;\ +\infty[$:

1) $f : x \longmapsto -\dfrac{4}{x} + 2$.

2) $f : x \longmapsto -3\sqrt{x} + 1$.

Exercice 39

Dans chacun des cas suivants, donner l'ensemble de définition de la fonction h puis écrire h comme la composée d'une fonction f suivie d'une fonction g :

1) $h : x \longmapsto \sqrt{1-5x}$.

2) $h : x \longmapsto \dfrac{1}{5x-7}$.

Exercice 40

f est une fonction définie sur l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$ par :

$$f : x \longmapsto -2 + \frac{1}{x-3}.$$

On appelle $(\mathcal{C}_f)$ sa représentation graphique dans un repère $(O\ ;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et $(\mathcal{H})$ celle de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ pour $x \in [-5\ ;\ -1]$.
On se propose de déduire géométriquement $(\mathcal{C}_f)$ de $(\mathcal{H})$.

1) **a)** Tracer $(\mathcal{H})$.

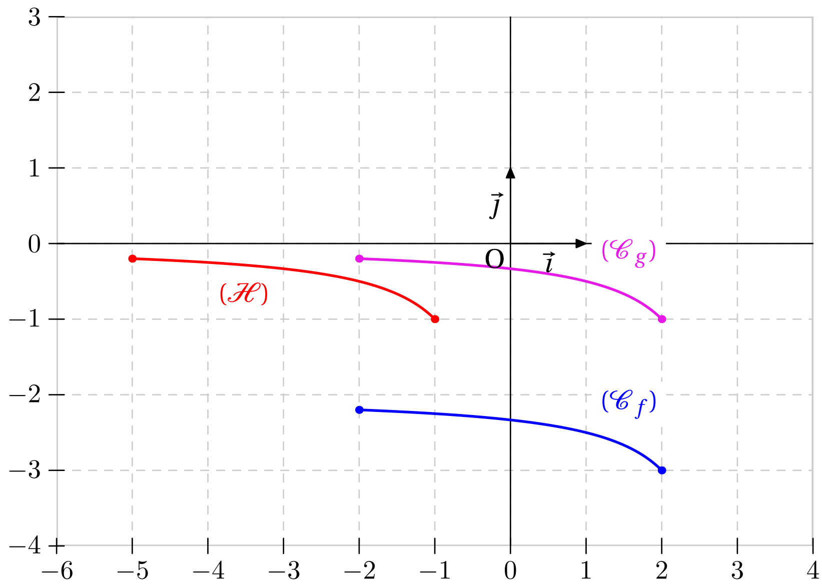
b) Par quelle translation pouvez-vous en déduire la représentation $(\mathcal{C}')$ de la fonction $g : x \longmapsto \frac{1}{x-3}$?

c) Par quelle translation pouvez-vous déduire $(\mathcal{C}_f)$ de $(\mathcal{C}')$?

2) Soit $\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$.
Expliquer pourquoi $(\mathcal{C}_f)$ se déduit de $(\mathcal{H})$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$.

3) Tracer $(\mathcal{C}_f)$.

Illustration



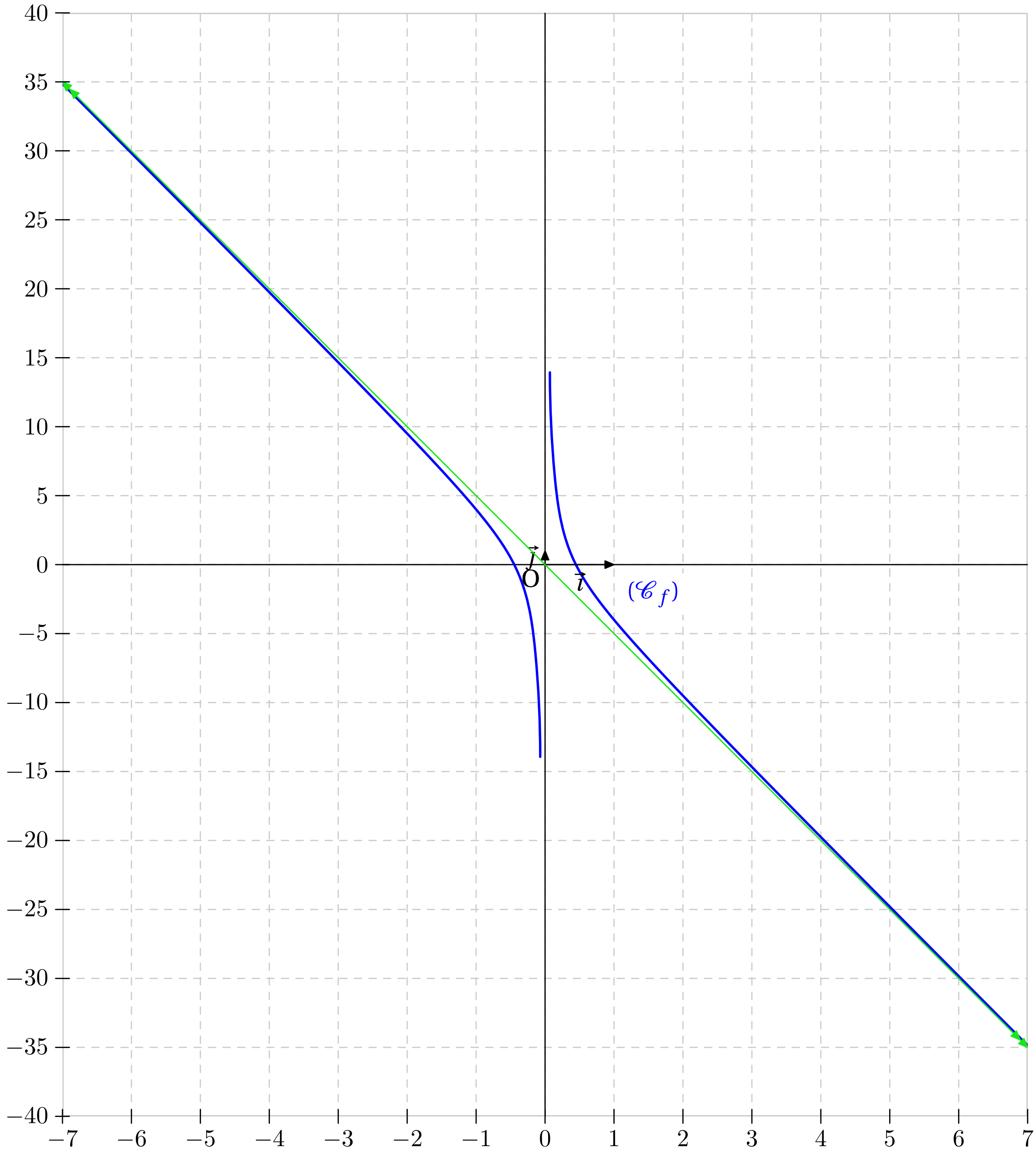
Exercice 41

1) Compléter l'égalité ci-dessous :

$$\frac{1-5x^2}{x} = \frac{1}{x} + \cdots$$

2) Déduisez-en le sens de variation de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1-5x^2}{x}$ sur chacun des intervalles $]-\infty\ ;\ 0[$ et $]0\ ;\ +\infty[$.

Illustration



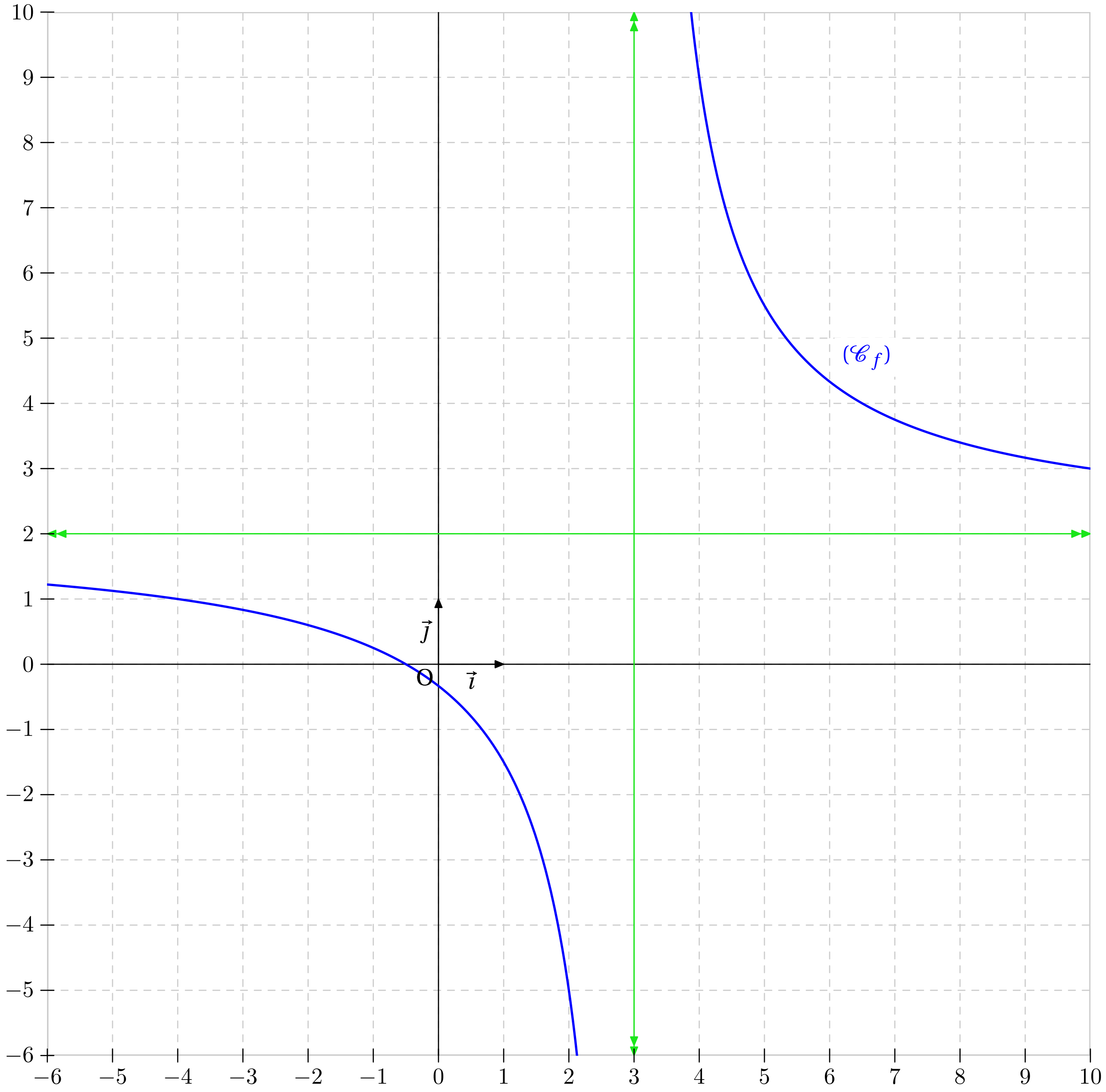
Exercice 42

On se propose d'étudier le sens de variation de la fonction f définie pour $x \neq 3$ par : $f : x \longmapsto \dfrac{2x+1}{x-3}$.

1) Compléter : $\dfrac{2x+1}{x-3} = 2 + \cdots$.

2) Après avoir décomposé f à l'aide de trois fonctions, étudier le sens de variation de la fonction f sur $]-\infty\ ;\ 3[$ et sur $]3\ ;\ +\infty[$.

Illustration



Exercice 43

Une entreprise fabrique une quantité q d'un certain produit. q est exprimée en tonnes et varie de 0 à 20. Le coût total de production est , en milliers d'euro :

$$C(q) = q^3 - 30q^2 + 300q.$$

1) Tracer la courbe représentative de la fonction C.

2) La production est vendue intégralement au prix de $84\,000$ € la tonne. La recette totale, en milliers d'euros est donc : $R(q) = 84q$.

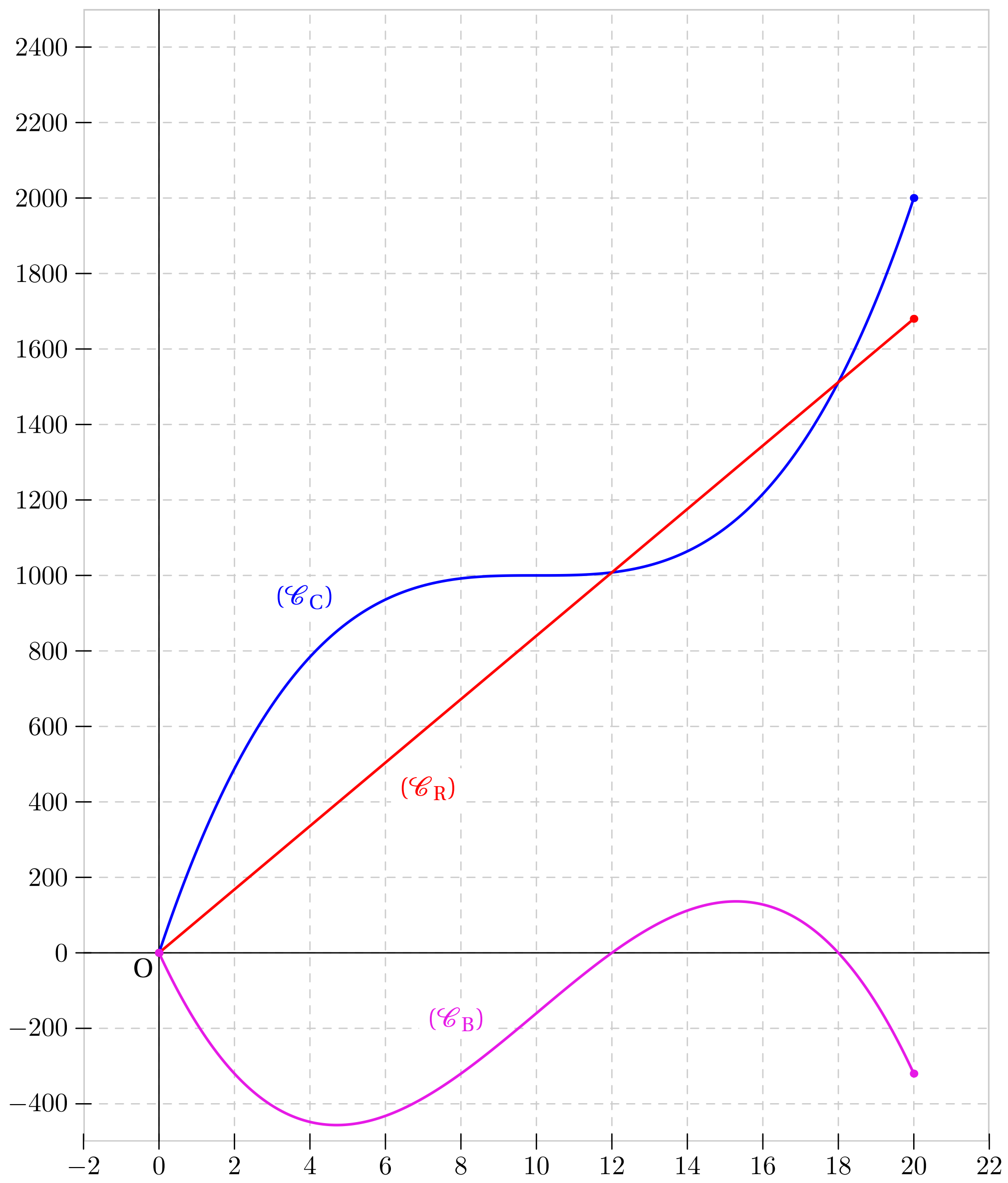
a) Étudier le signe de la fonction :

$$B(q) = R(q) - C(q).$$

Interpréter le résultat en terme de bénéfice.

b) Pour quelle valeur q_0 de q le bénéfice est-il maximal ? Vous donnerez une valeur approchée de q_0 à $0,1$ près.
Donner le bénéfice maximal.

Illustration



Exercice 44

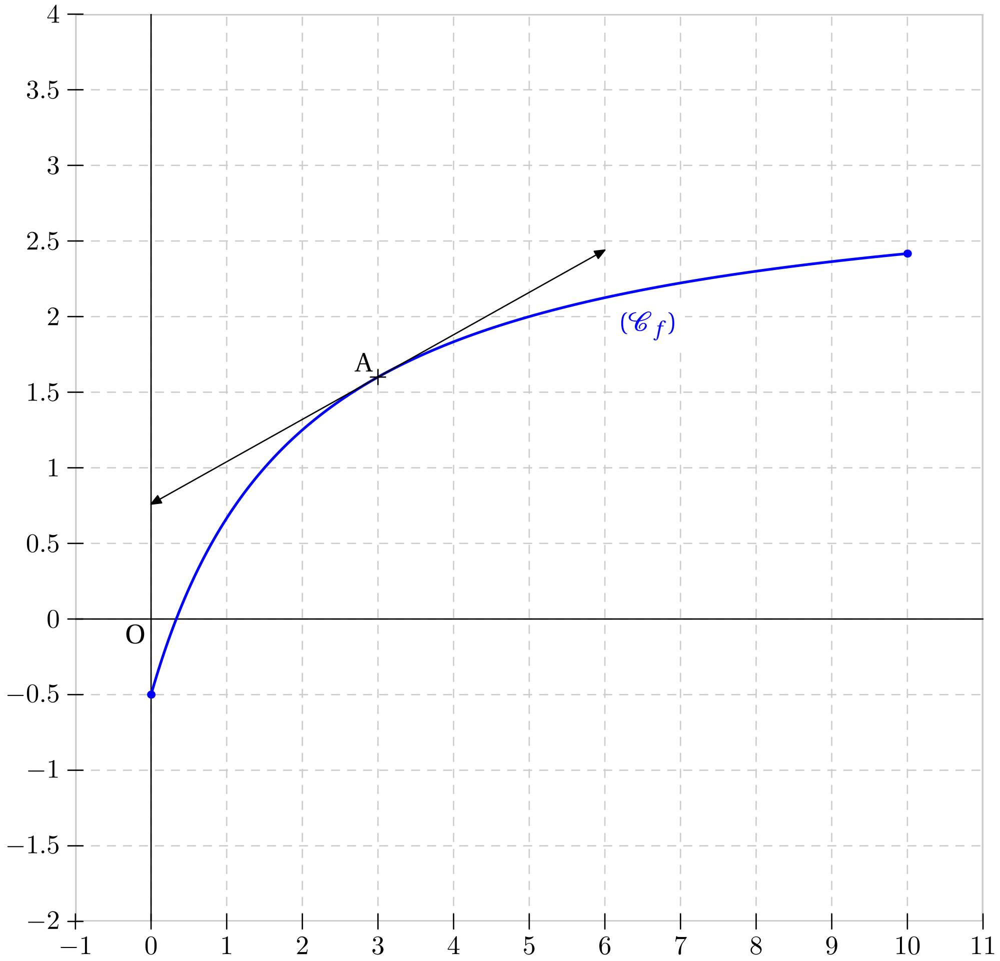
Soit la fonction f définie sur $[0\ ;\ 10]$ par $\quad f(x) = \dfrac{3x-1}{x+2}$.

1) Calculer $f'(x)$.

2) Donner l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point E d'abscisse 3.

3) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ et (T).

Illustration



Exercice 45

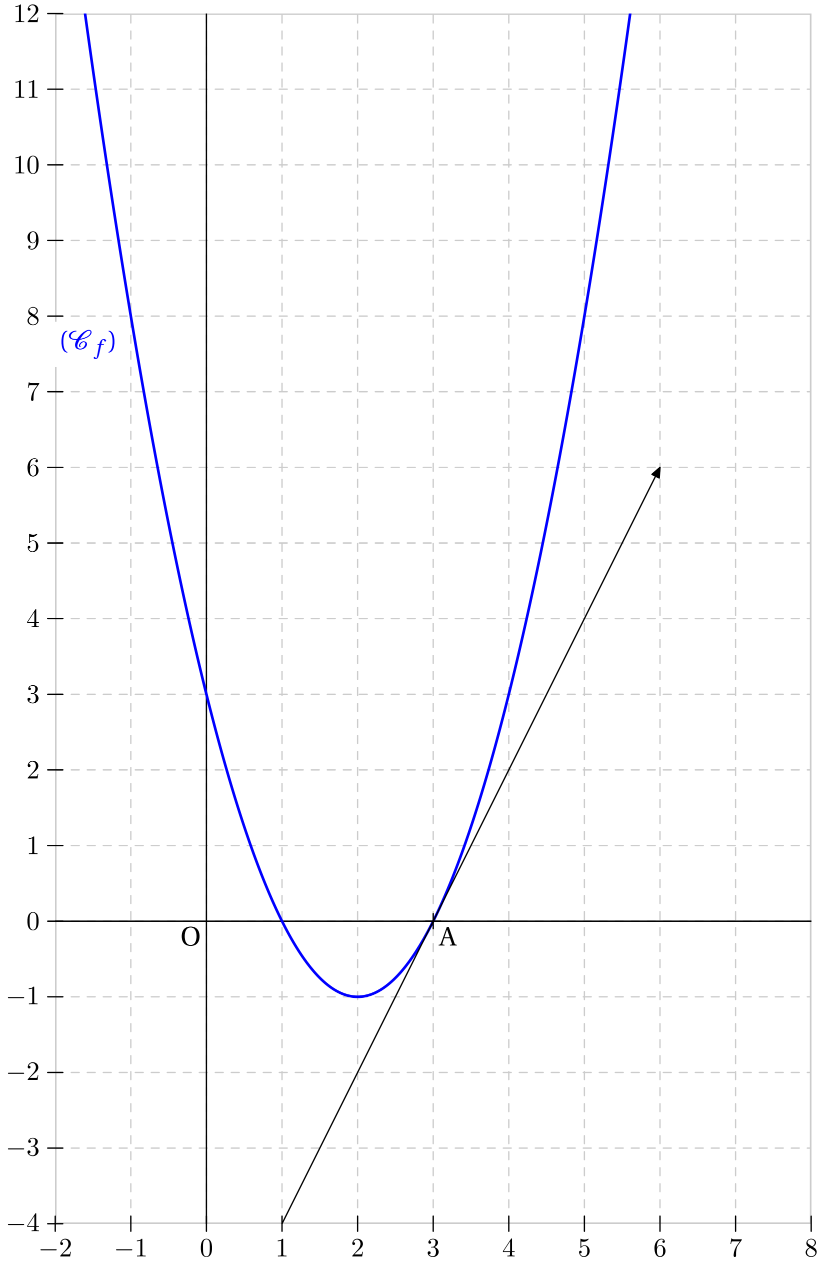
Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

1) **a)** Montrer qu'il existe une seule tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dont le coefficient directeur soit égal à 2.

b) Donner l'équation réduite de cette tangente.

2) Plus généralement, a étant un nombre réel quelconque, montrer qu'il existe une seule tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dont le coefficient directeur soit égal à a.

Illustration



Exercice 46

Le coût total de production de x objets pour une certaine entreprise est en milliers d'euros :

$$C(x) = 180 + 12x - 0,01x^2.$$

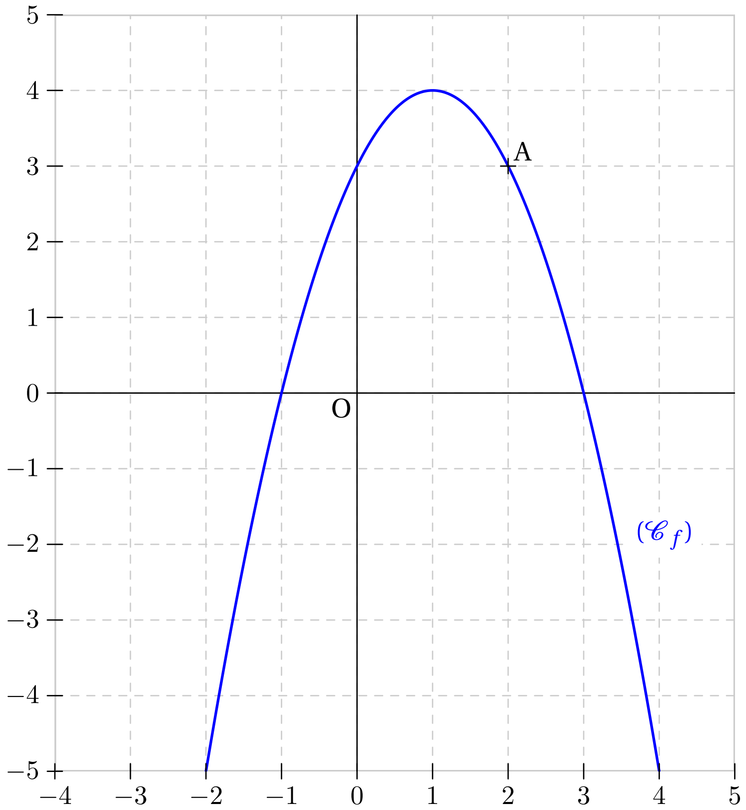
1) Calculer la valeur exacte du coût marginal :

$$C_M(x) = C(x+1) - C(x).$$

2) Calculer $C'(x)$.

3) Quelle est l'erreur commise lorsqu'on prend $C'(x)$ comme valeur approchée du coût marginal ?

Exercice 47



La courbe $(\mathcal{C}_f)$ ci-dessus est la courbe représentative d'une fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1) Que peut-on dire du discriminant de $f(x)$? Justifier.

2) Que peut-on dire du signe de a ? Justifier.

3) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$.

4) En déduire une factorisation de $f(x)$. (A ce stade, on gardera a dans la factorisation).

5) Sachant que $(\mathcal{C}_f)$ passe par le point $A(2\ ;\ 3)$, en déduire la valeur de a.

6) Donner l'expression de $f(x)$. On précisera les valeurs de a, b et c.

Exercice 48

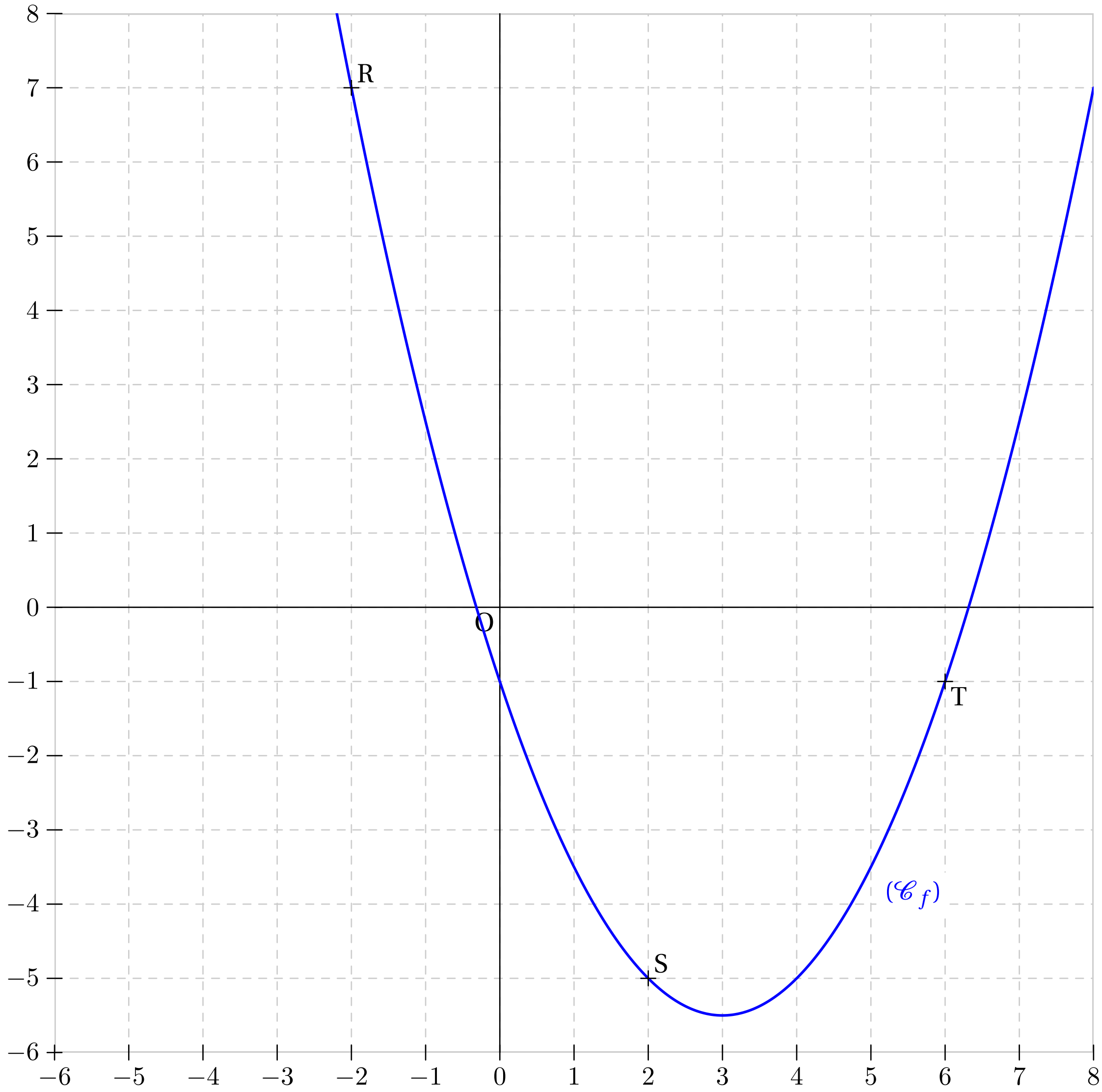
Une parabole (P) a pour équation $y = ax^2 + bx + c$.

1) Déterminer les réels a, b et c à l'aide d'un système sachant que (P) passe par les points $R(-2\ ;\ 7)$, $S(2\ ;\ -5)$ et $C(6\ ;\ -1)$.

2) **a)** Résoudre l'équation : $\dfrac{1}{2}x^2 - 3x - 1 = 0$.

b) Donner une interprétation graphique de ce résultat.

Illustration



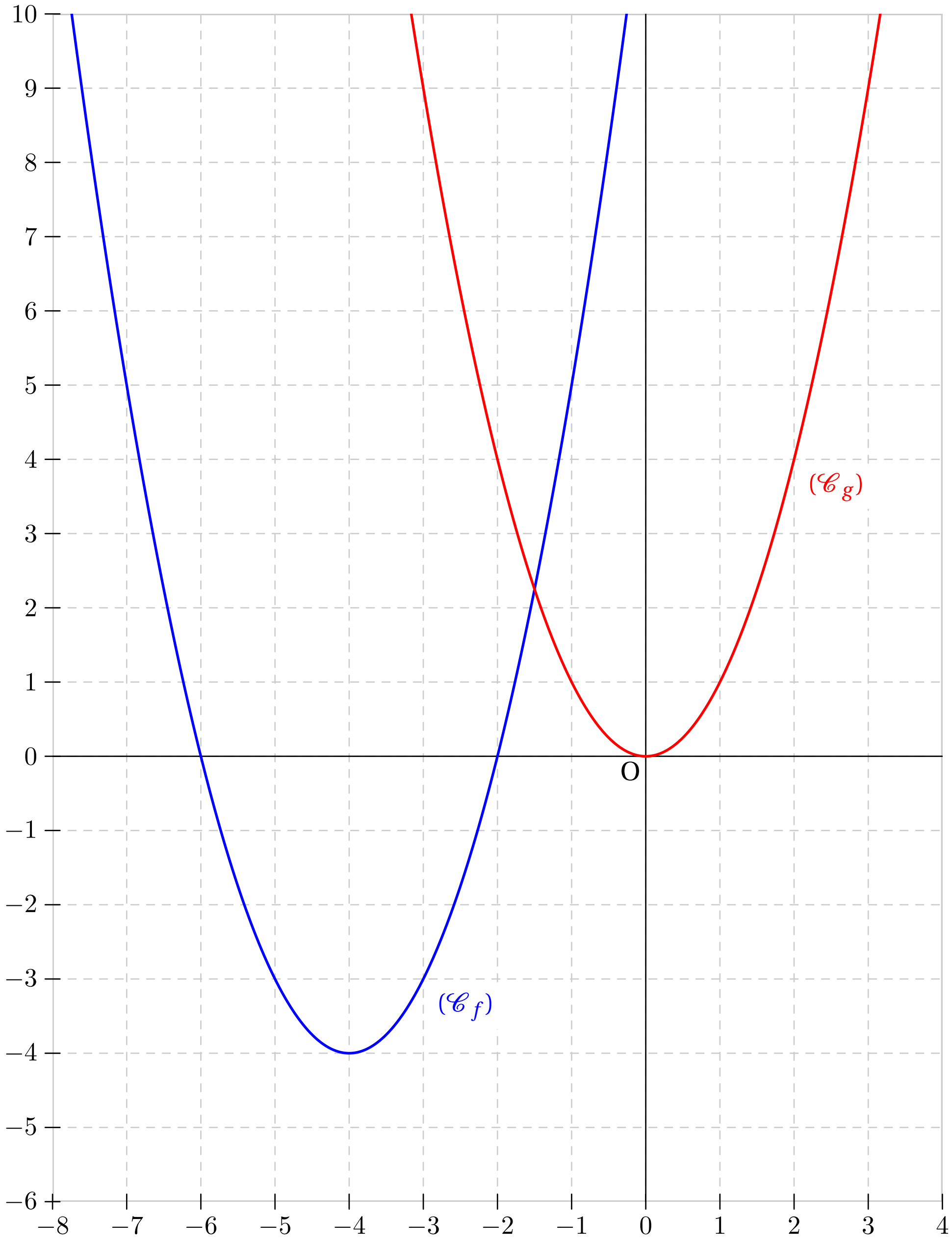
Exercice 49

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 8x + 12$.

1) Justifier pourquoi la courbe $(\mathcal{C}_f)$ représentative de la fonction f est une translatée de la parabole $(\mathcal{P})$ d'équation $y = x^2$.

2) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Illustration

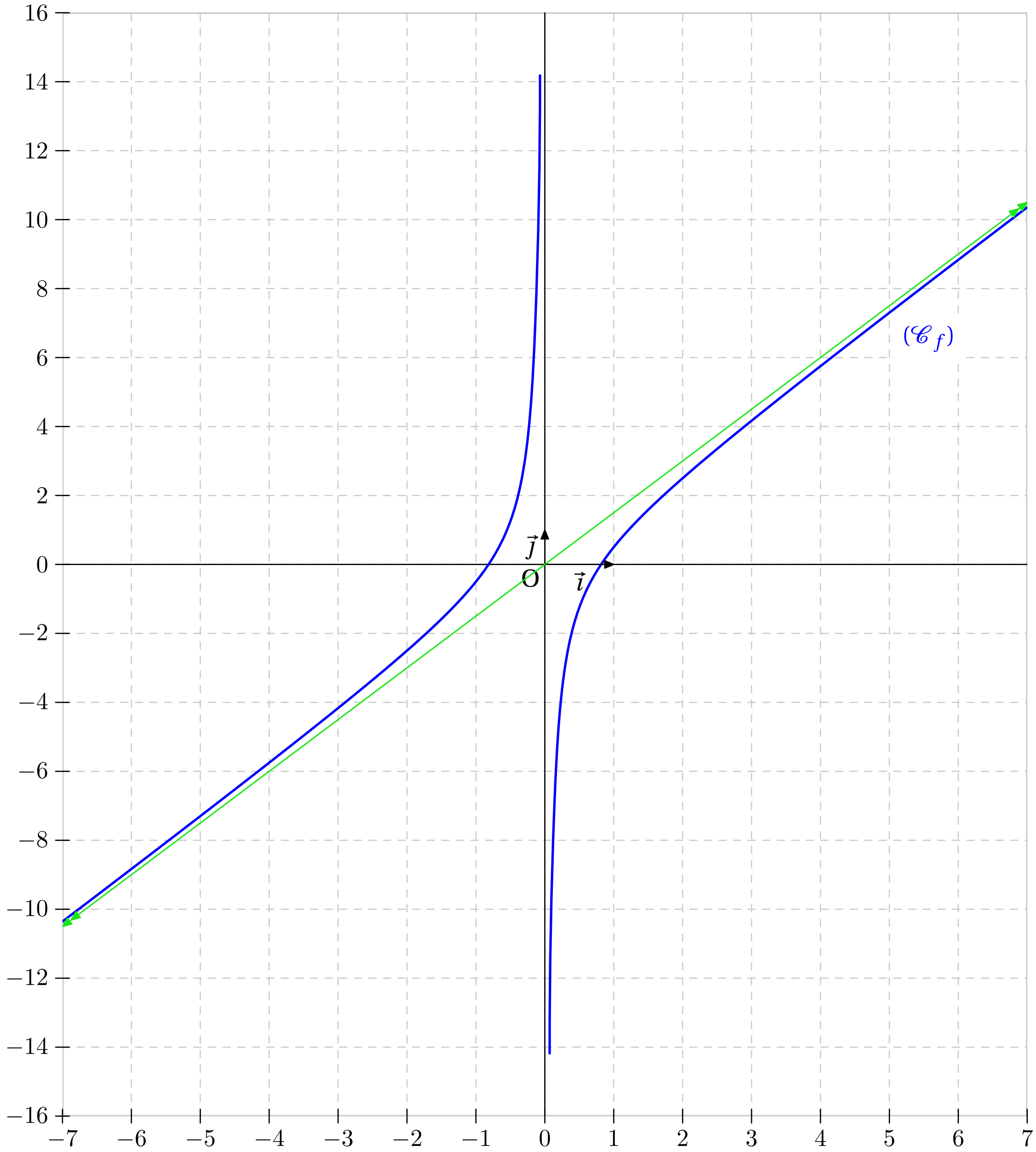


Exercice 50

1) Compléter l'égalité : $\dfrac{3x^2-2}{2x} = -\dfrac{1}{x} + \cdots$.

2) En déduire le sens de variation de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3x^2-2}{2x}$.

Illustration



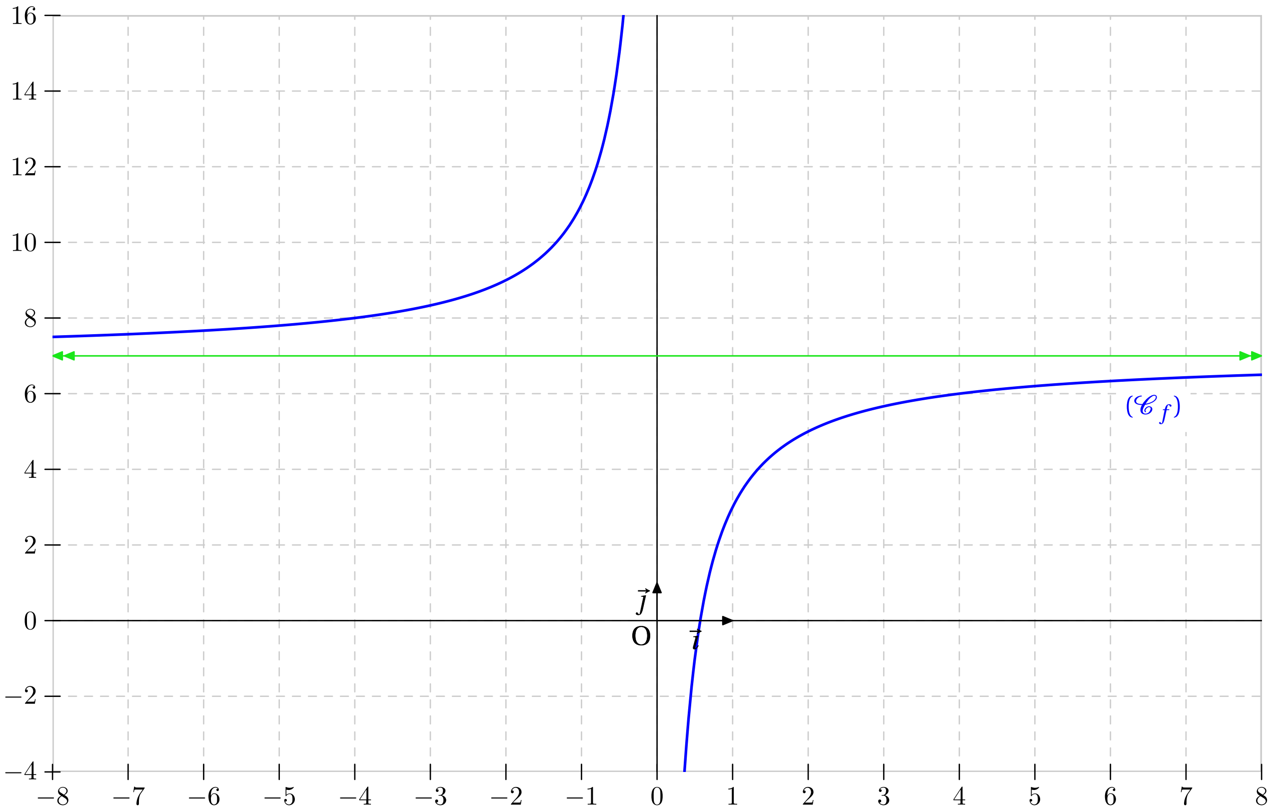
Exercice 51

Soit la fonction f définie par : $f(x) = -\dfrac{4}{x} + 7$.

1) Écrire f comme la composée de deux fonctions.

2) En déduire le sens de variation de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Illustration



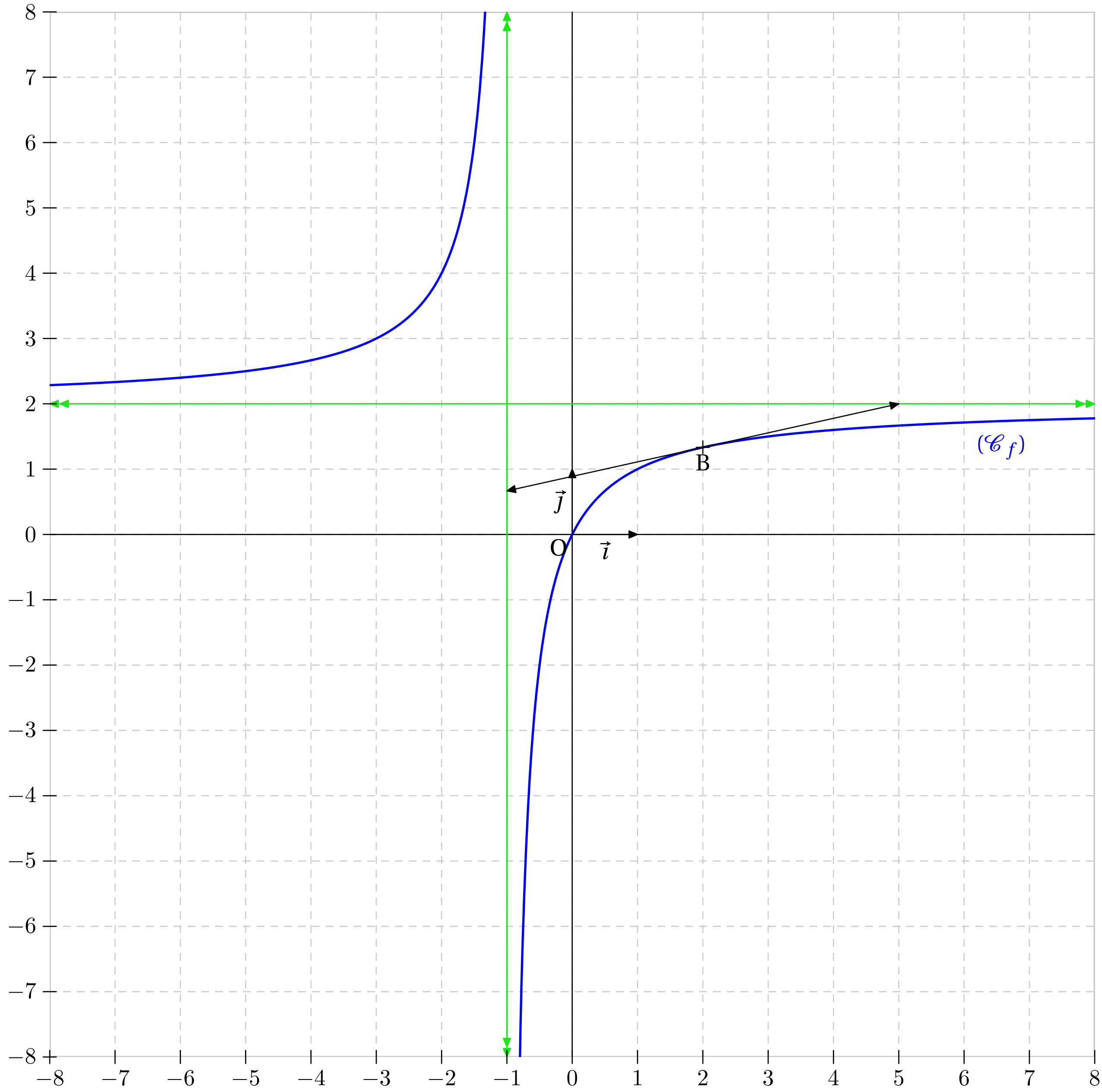
Exercice 52

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$.

1) Calculer $f'(x)$.

2) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point B d'abscisse 2.

Illustration

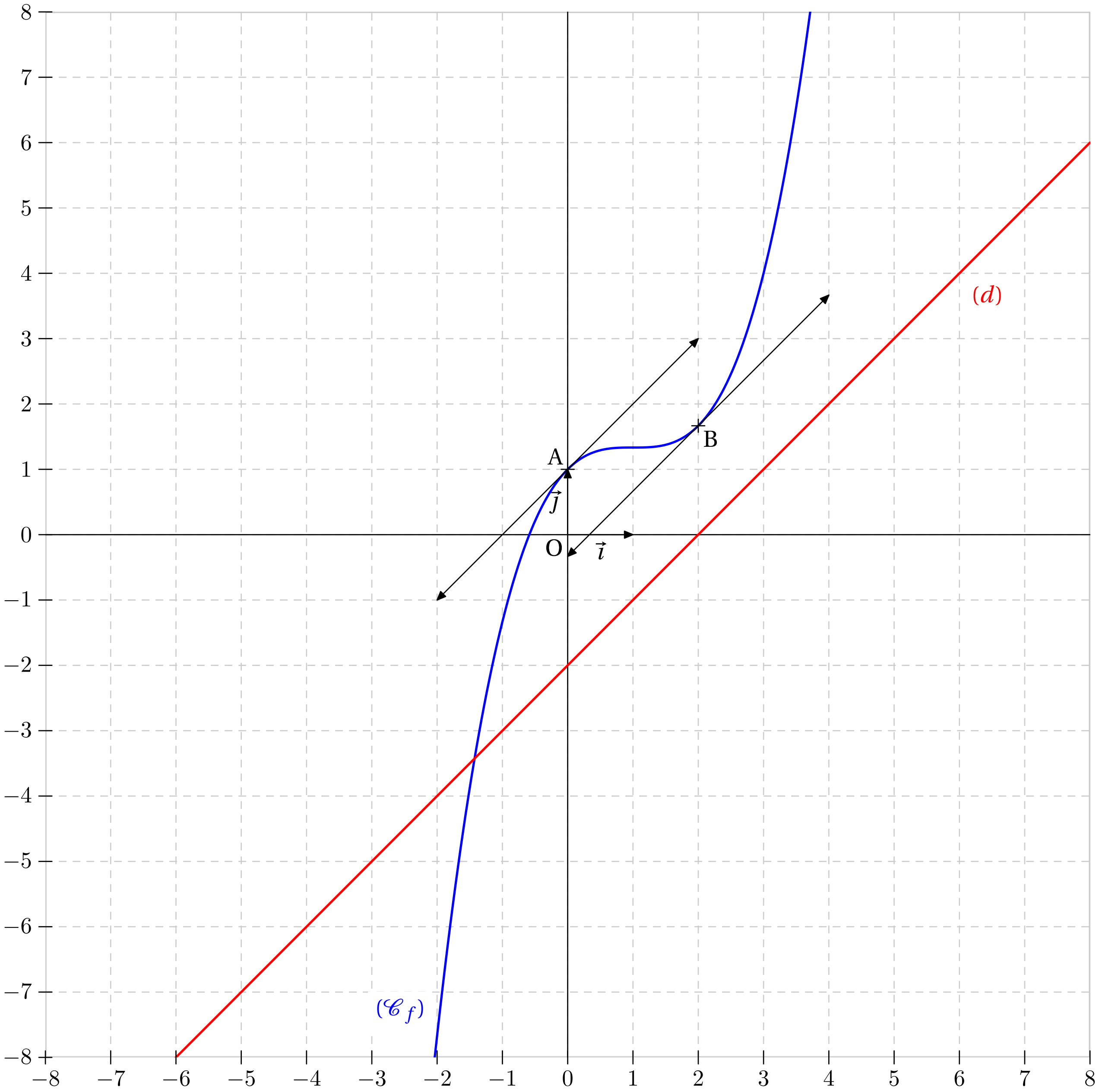


Exercice 53

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + x + 1$.

Montrer qu'il existe un ou plusieurs points de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ pour lesquels la tangente est parallèle à la droite (d) d'équation $y = x - 2$.

Illustration



Exercice 54

Dans une entreprise, le coût total en euros, pour produire q objets est : $C(q) = 150\,000 + 20q + \frac{1}{50}q^2$.
Chaque produit est vendu 190 €.

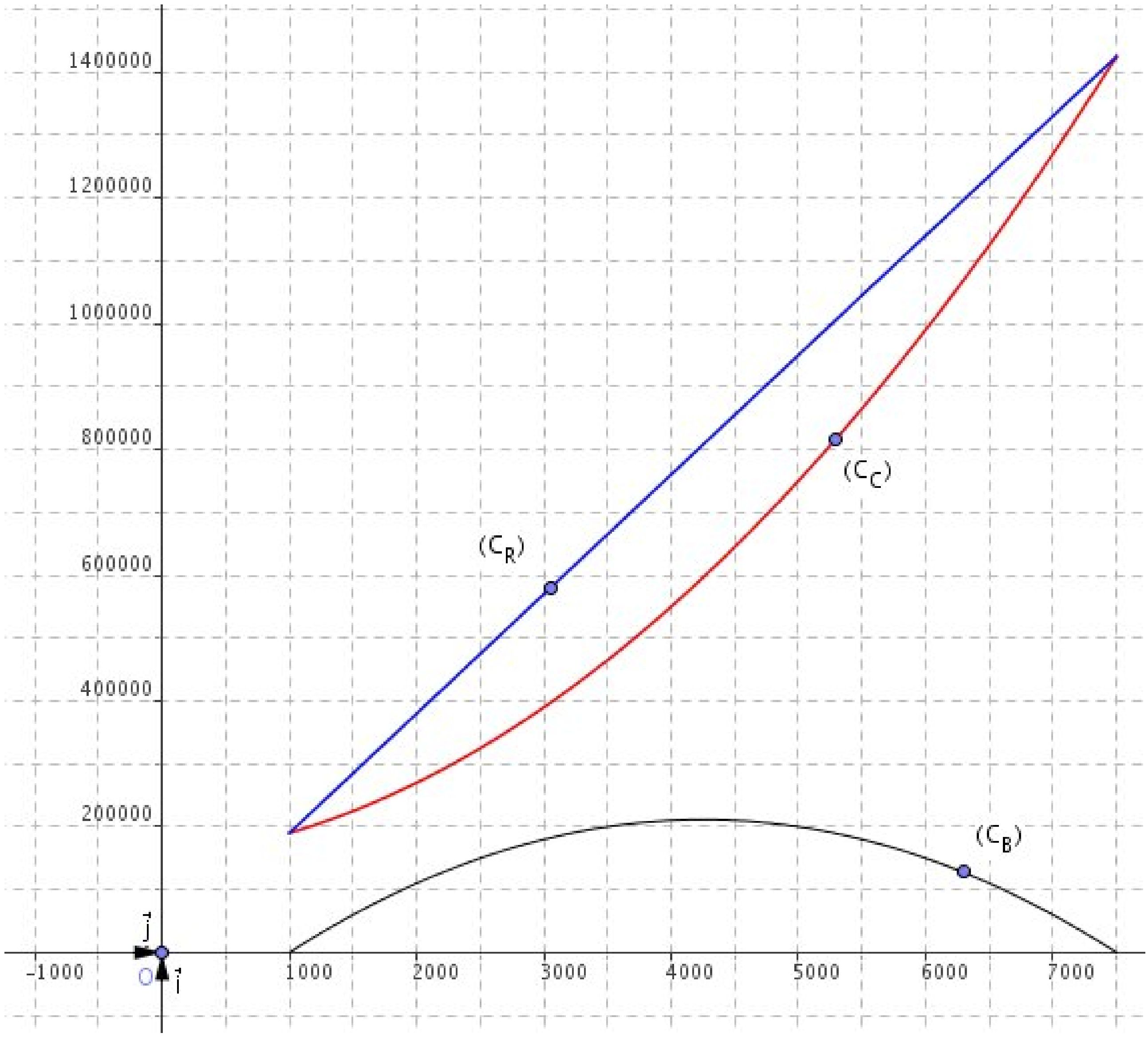
1) Exprimer la recette $R(q)$ en fonction de q.

2) Exprimer le bénéfice $B(q)$ en fonction de q.

3) Étudier les variations de B sur l'intervalle $[1\,000\ ;\ 7\,500]$.

4) En déduire la valeur de q pour laquelle le bénéfice est maximal.

Illustration



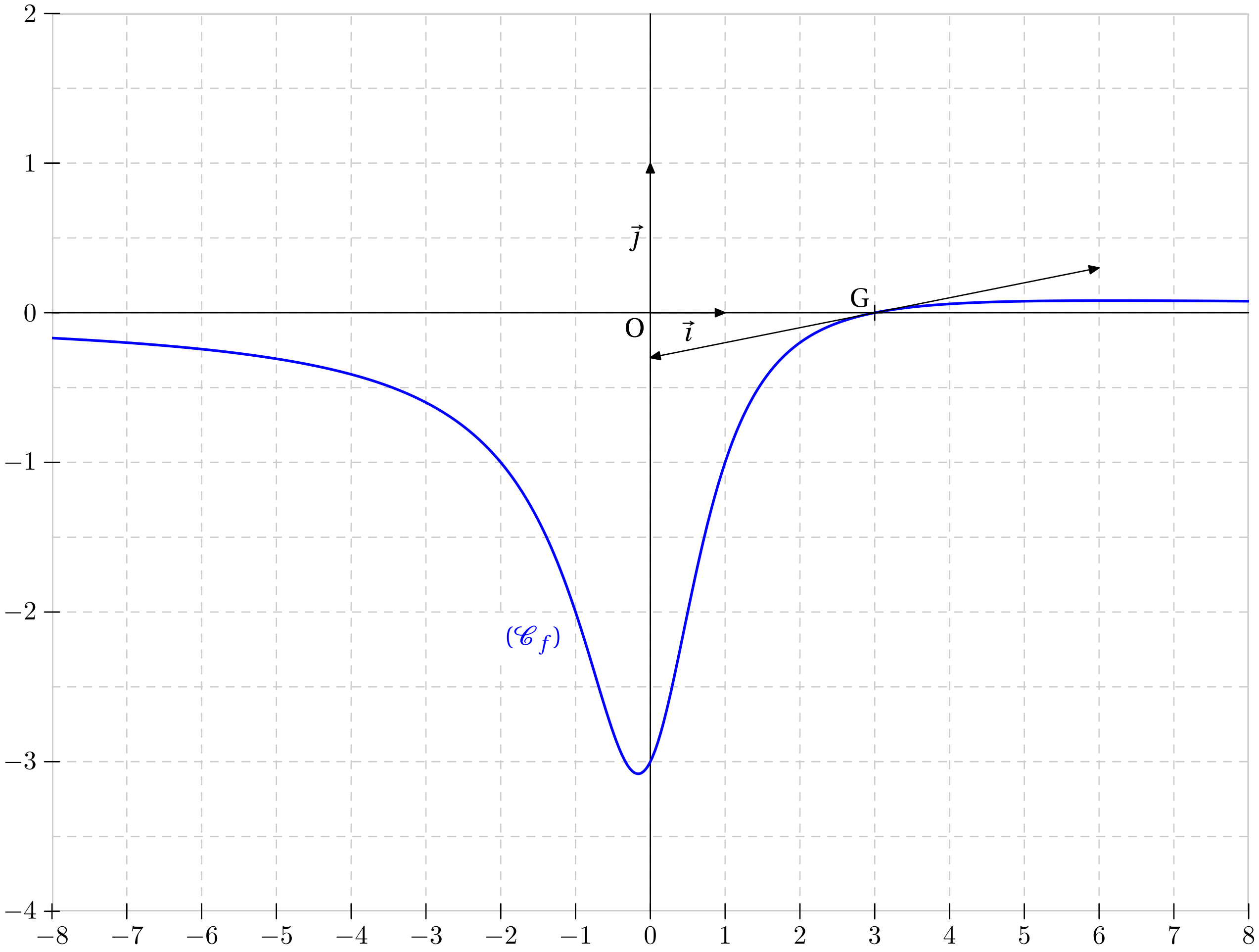
Exercice 55

On donne $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2+1}$.

1) Calculer $f'(x)$.

2) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point G d'abscisse 3.

Illustration



Exercice 56

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par $f(x) = \dfrac{3x-5}{x-2}$.

1) Calculer la limite de f en $+\infty$.

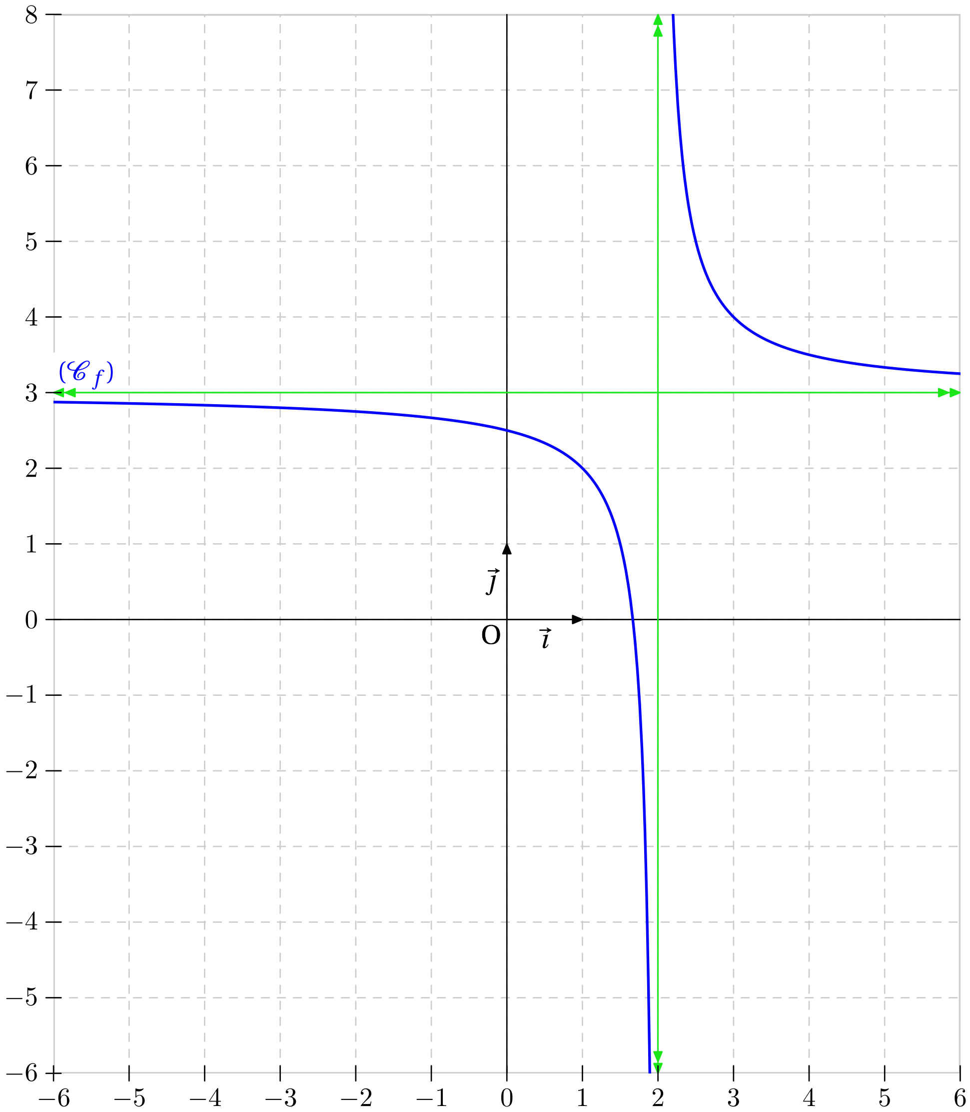
2) Calculer la limite de f en $-\infty$.

3) Calculer les limite de f en 2.

4) Calculer $f'(x)$. En déduire le sens de variation de f.

5) Donner le tableau de variation complet de f.

Illustration



Exercice 57

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par $f(x) = \dfrac{2x+5}{x-3}$.

1) Calculer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
Interpréter graphiquement.

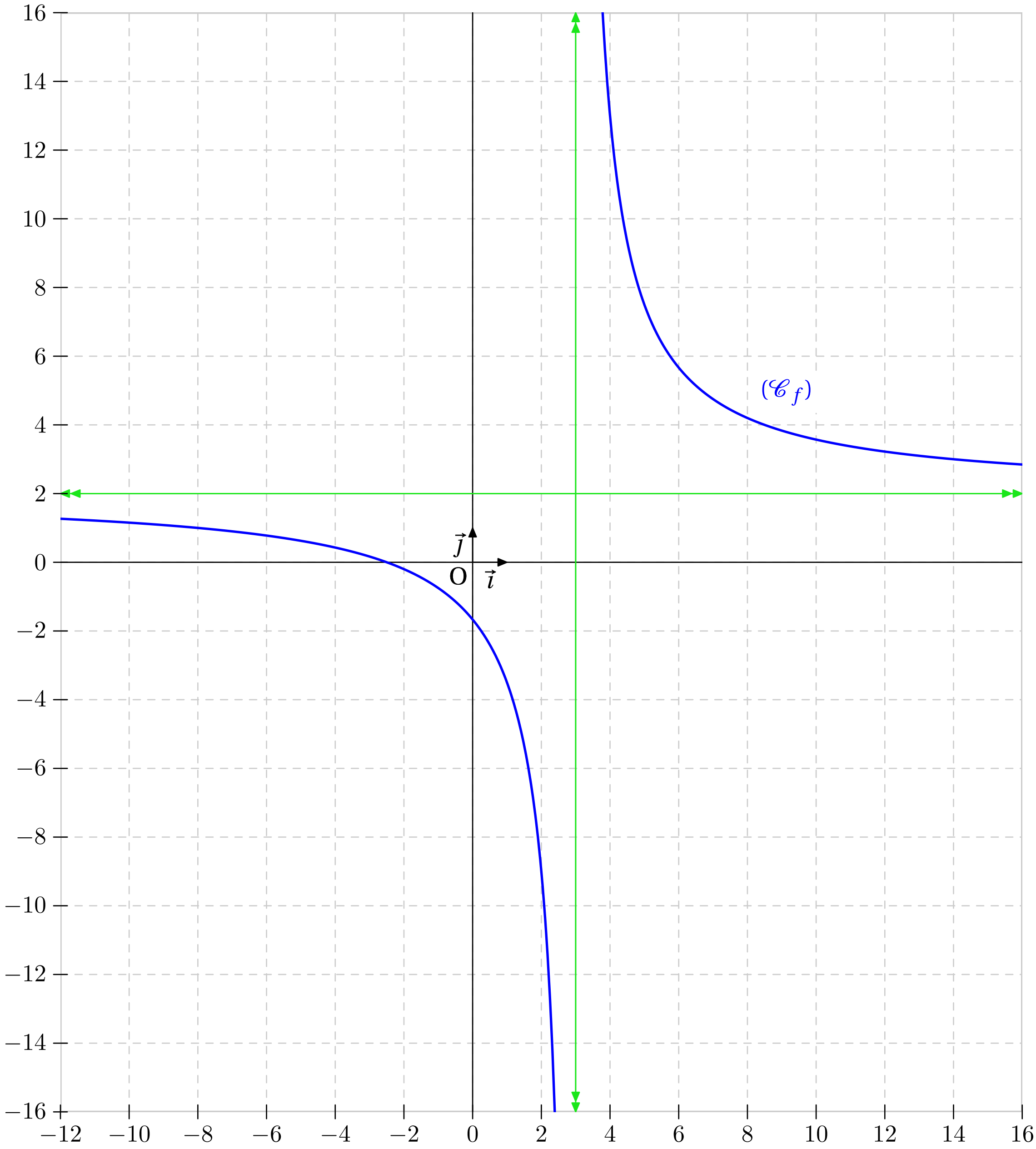
2) Calculer les limite de f en 3.
Interpréter graphiquement.

3) Calculer $f'(x)$. En déduire le sens de variation de f.

4) Donner le tableau de variation complet de f.

5) Dessiner l'allure de la courbe, ainsi que ses asymptotes éventuelles.

Illustration



Exercice 58

Soit la fonction f définie sur $]2\ ;\ +\infty[$ par : $\quad f(x) = -2x + 4 + \dfrac{1}{x-2}$.

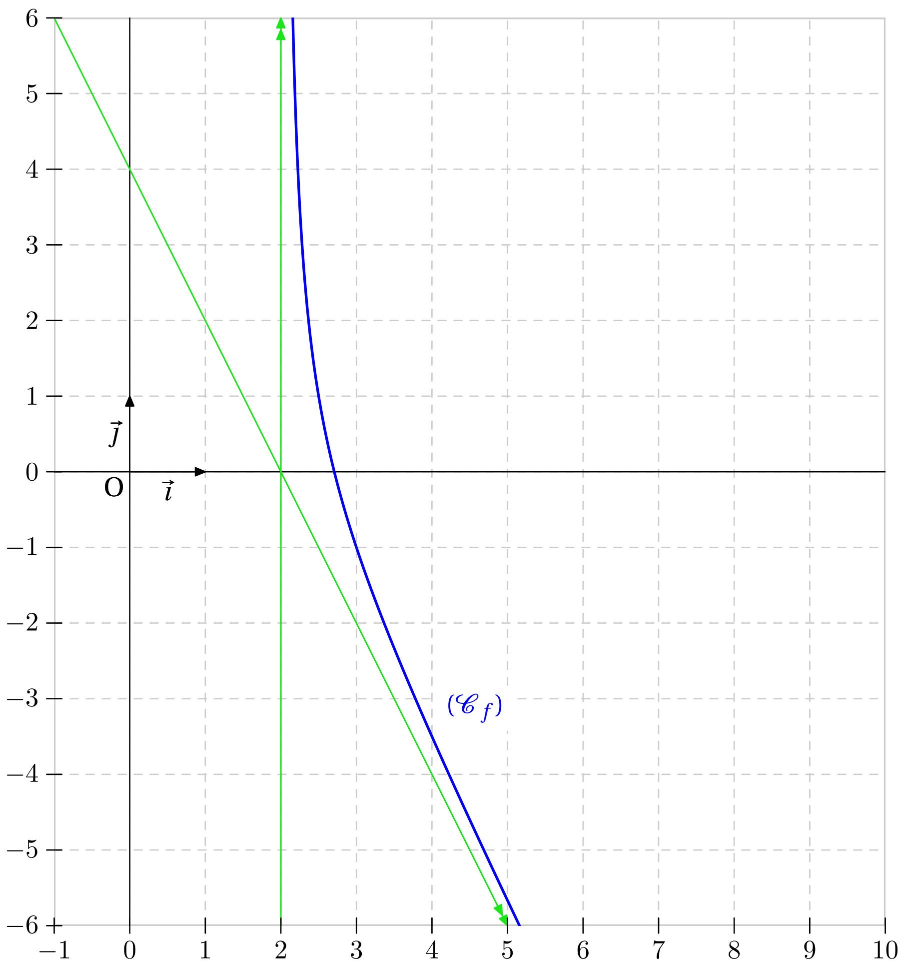
1) Calculer la limite de f en $+\infty$.

2) Calculer la limite de f en 2. Que peut-on en conclure ?

3) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = -2x + 4$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$.

4) Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (Δ).

Illustration



Exercice 59

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par $\quad f(x) = \dfrac{3x^2 - 11x - 38}{x-2}$.

1) Déterminer les limites de f en 2. Que peut-on en conclure ?

2) Déterminer les limites de f en l'infini.

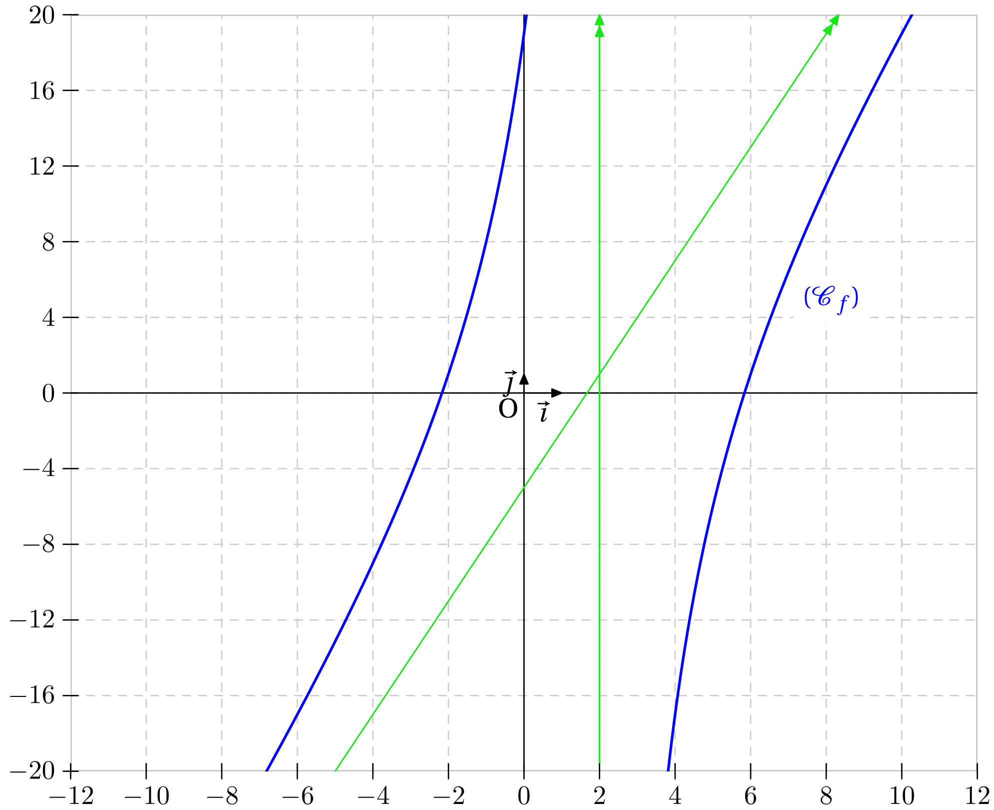
3) Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique (Δ).

4) Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (Δ).

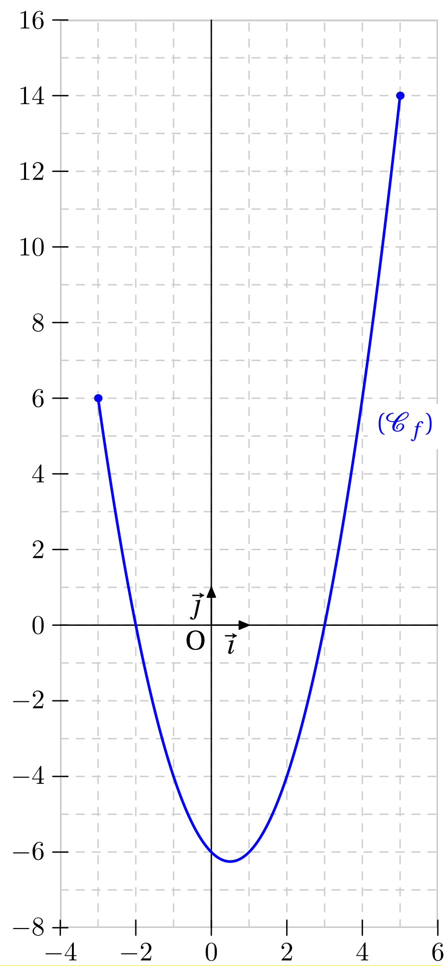
5) Calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de f.

6) Donner le tableau de variations complet de f.

Illustration



Exercice 60



Soit f la fonction définie sur $[-3\ ;\ 5]$ par $f(x) = x^2 - x - 6$.
Ci-contre, on donne $(\mathcal{C}_f)$, la courbe représentative de f.

1) Déterminer graphiquement :

- $f(0)$: ....
- l'image de 3 par f : ....
- les éventuels antécédents de -4 par f : ....
- les éventuels antécédents de 10 par f : ....
- les éventuels antécédents de -6 par f : ....
- l'ordonnée du point de $(\mathcal{C}_f)$ d'abscisse 5 : ....
- les solutions de l'équation $f(x) = 3$ ....

2) Déterminer algébriquement l'image de $\frac{1}{2}$ par f.

3) Montrer que pour tout x de $[-3\ ;\ 5]$:

$$f(x) = (x-3)(x+2).$$

4) Retrouver algébriquement les antécédents de 0 par f.

Exercice 61

Dans tout l'exercice, f est une fonction et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$.

1) Si $f(2) = 3$ alors :

	V	**F**
• 2 est l'image de 3 par f	☐	☐
• 2 a pour image 3 par f	☐	☐
• 2 est un antécédent de 3 par f	☐	☐
• 3 n'a pas d'antécédent par f	☐	☐
• 2 est l'abscisse d'un point de $(\mathcal{C}_f)$ qui a pour ordonnée 3	☐	☐

2) Si $f(x) = x^2 + 2$ alors :

	V	**F**
• l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution	☐	☐
• 6 admet deux antécédents par f	☐	☐
• l'image de -1 par f est 3	☐	☐
• le point de coordonnées $(2;6)$ est un point de $(\mathcal{C}_f)$	☐	☐
• $f\left(-\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{14}{9}$	☐	☐

Exercice 62

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentant une fonction f définie sur $[-1\ ;\ 6]$ vérifiant les contraintes suivantes :

— $f(-1) = 3$;

— l'image de 3 par f est 1 ;

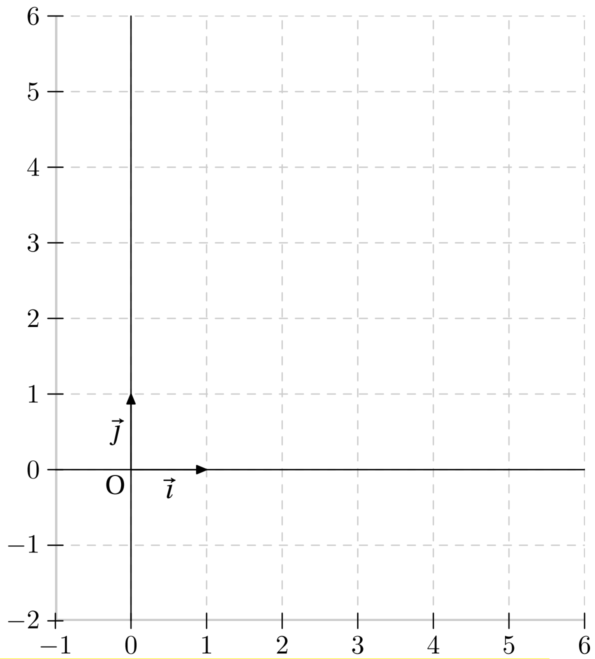
— 2 est un antécédent de -1 par f ;

— 5 est une solution de l'équation $f(x) = 6$;

— l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions.

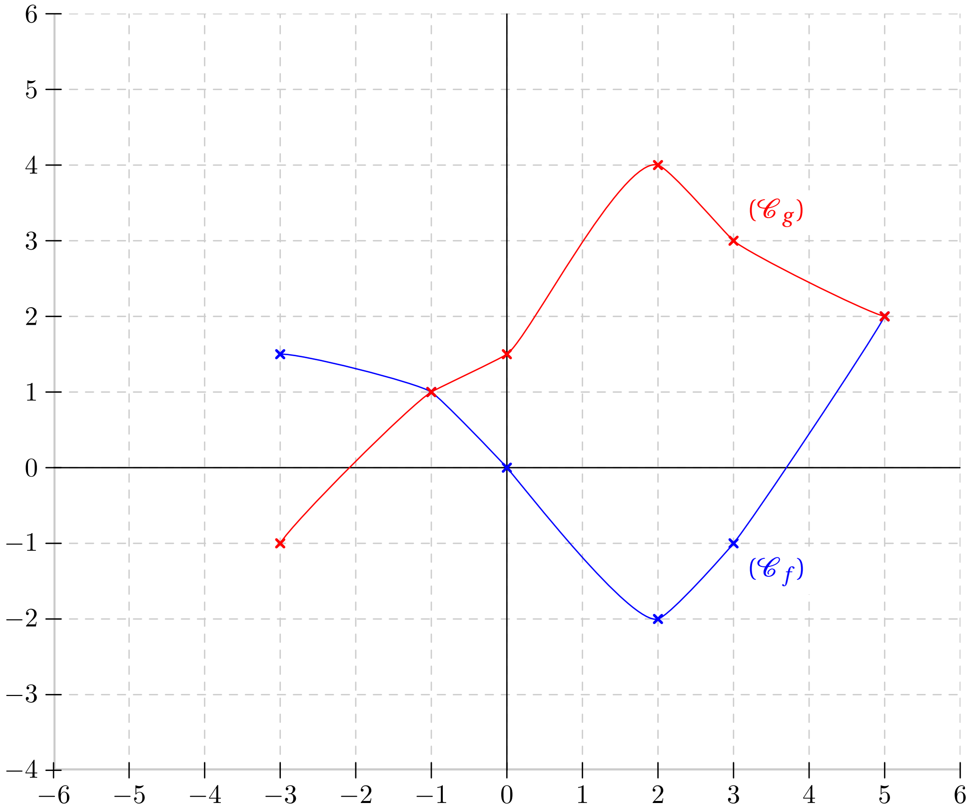
1) Traduire chacune des cinq informations données sur f par une information sur $(\mathcal{C}_f)$.

2) Donner une allure possible pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$.



Exercice 63

Soit f la fonction définie par la courbe donnée ci-dessous :



1) Répondre par vrai ou par faux aux propositions suivantes :

	V	F
• f est décroissante sur $[-8\ ;\ 7]$.	☐	☐
• Le maximum de f est 7.	☐	☐
• L'image de 5 par f est -1.	☐	☐
• L'image de 4 par f est 2.	☐	☐
• $f(7) = -3$.	☐	☐
• L'ensemble de définition de f est $[-8\ ;\ 7]$.	☐	☐
• $f(-1) = 2$.	☐	☐
• f est croissante sur $[-5\ ;\ -1]$.	☐	☐
• L'équation $f(x) = 3$ admet 3 solutions.	☐	☐
• f est croissante sur l'intervalle $[2,5\ ;\ 3,5]$.	☐	☐
• Le minimum de f sur $[-8, 0]$ est -3.	☐	☐
• $f(-8) > f(6)$.	☐	☐
• -4 est un antécédent de 0 par f.	☐	☐
• $f(-5) = f(2)$.	☐	☐
• Le minimum de f est atteint en 7.	☐	☐
• $f(0,1) > f(0,2)$.	☐	☐
• f est décroissante sur $[-8\ ;\ -5]$.	☐	☐
• L'équation $f(x) = 0$ admet 4 solutions.	☐	☐
• f admet un minimum en 2.	☐	☐
• Pour tout $x \in [-8\ ;\ 2]$, $f(x) = x^6 + x^2 + 3$.	☐	☐
• 2 est l'antécédent de -2 par f.	☐	☐
• $f(x) \geqslant -4$ n'admet pas de solutions.	☐	☐

2) Dresser le tableau de variations de cette fonction.

3) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant 3$.

Exercice 64

- Une affirmation juste cochée rapporte 1 point ;
- Une affirmation fausse cochée coûte 1 point.

1) La courbe de la fonction f définie sur $[-5 ; 4]$ est représenté ci-dessous :

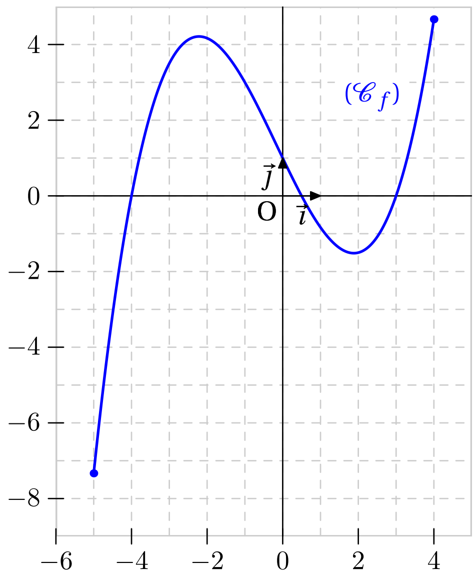
☐ 0 admet trois antécédents par f.

☐ Tout élément de $[-3 ; 4]$ admet trois antécédents.

☐ $f(-3) \leqslant f(1)$.

☐ Le minimum de f sur $[-5 ; 4]$ est compris entre -2 et -1.

☐ f est croissante sur $[-5 ; 0]$.



2) f est une fonction définie sur $I = [-4 ; 5]$ et son tableau de variations est donné ci-dessous.

De plus $f(-1) = 0$.

x	-4		0		3		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-3	↗	2	↘	0	↗	4

☐ f admet 4 comme maximum sur I.
☐ L'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions.
☐ $f(1,5) < f(1)$
☐ $f(2) = 0$
☐ $f(4) > 0$
☐ f admet 0 comme minimum sur I.
☐ $f(4) > f(-2)$

3) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad f(x) = x^2 - 1$.

☐ L'équation $f(x) = -0,5$ admet deux solutions.
☐ -2 et 2 sont les antécédents de 3 par f.
☐ Si a est un réel négatif, alors il n'y a pas d'antécédent de a par f.
☐ L'équation $f(x) = -2$ n'a pas de solution.

Exercice 65

On considère la fonction polynôme f définie sur$\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$.

1) Déterminer les réels α et β tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2(x - \alpha)^2 - \beta$.

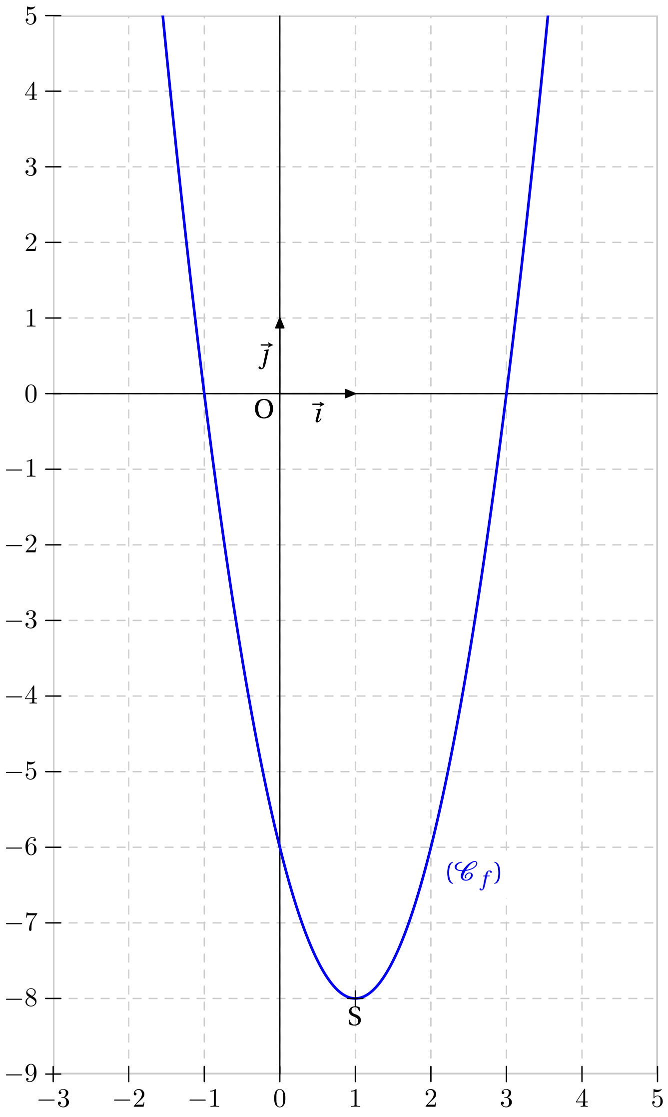
2) En déduire la valeur de x pour laquelle $f(x)$ est minimal.

3) Étudier les variations de f sur $]-\infty\ ;\ 1[$, puis sur $]1\ ;\ +\infty[$, puis dresser le tableau de variations de f.

4) En utilisant la question **1)**, résoudre l'équation $f(x) = 0$.

5) Compléter un tableau de valeurs, puis tracer l'allure de la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-2\ ;\ 4]$.

Illustration



Exercice 66

On considère la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

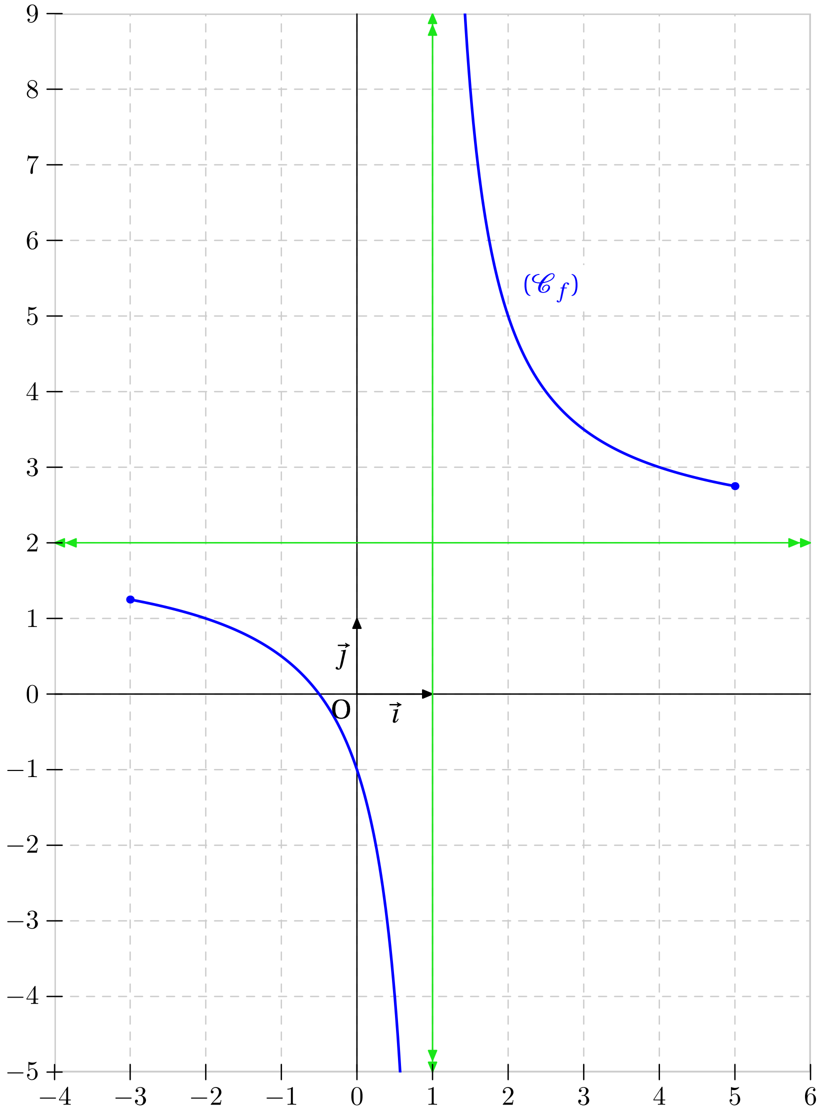
1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_g$ de g.

2) Montrer que pour $x \in \mathcal{D}_g$, on a $g(x) = 2 + \dfrac{3}{x-1}$.

3) Étudier les variations de g sur $]-\infty\ ;\ 1[$, puis sur $]1\ ;\ +\infty[$, puis dresser le tableau de variations de g.

4) Compléter un tableau de valeurs et tracer la représentation graphique de g sur $[-3\ ;\ 5]$.

Illustration



Exercice 67

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de définition, puis l'ensemble de dérivabilité et calculer la dérivée.

$f(x) = 3x^3 - 2x + 3$

$g(x) = 5(2x-3)(x^2+2)$

$h(x) = \sqrt{x}(2x^2 - 3x)$

$p(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

$q(x) = \dfrac{x^2 + 1}{2x - 3}$

$t(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x}}$

Exercice 68

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+1}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

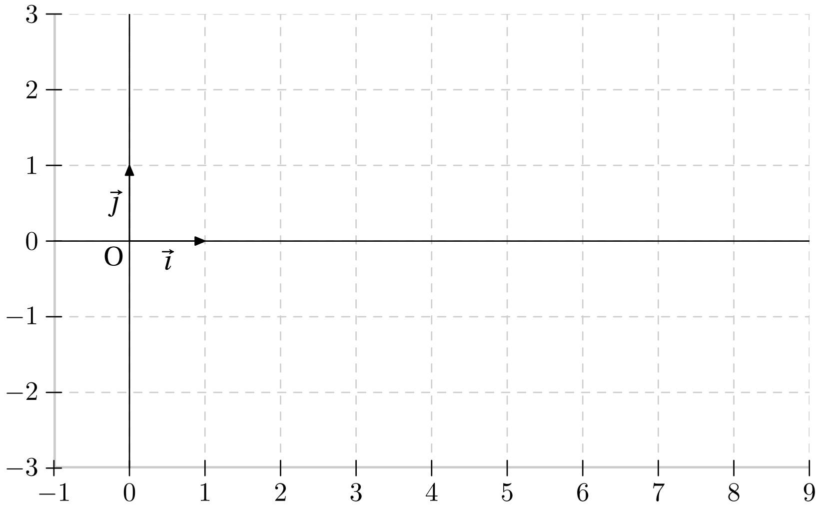
2) Pour $x \neq -1$, calculer $f'(x)$.

3) Déterminer le signe de $f'(x)$. En déduire le tableau de variation de f.

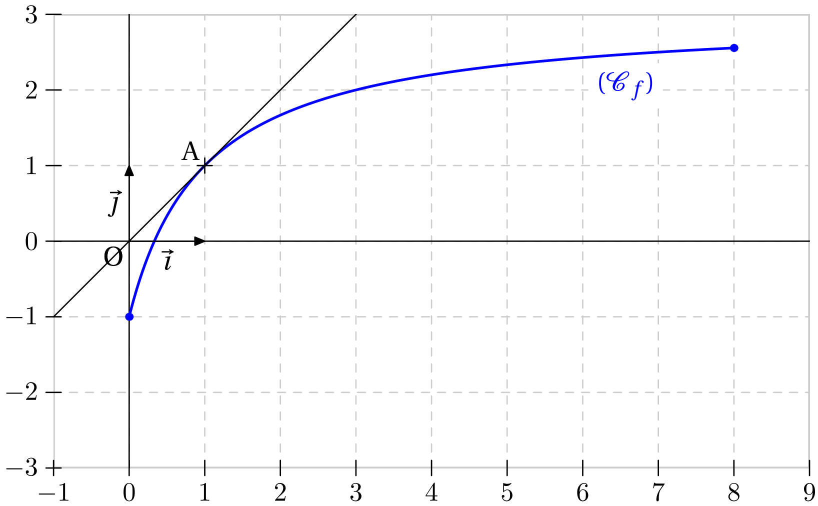
4) On désigne par $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentant f sur $[0 ; 8]$. Calculer l'ordonnée du point A de $(\mathcal{C}_f)$ d'abscisse 1.

5) Calculer le coefficient directeur de la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ en A.

6) Tracer l'allure de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère ci-dessous (en traçant précisément la tangente en A) :



Illustration



Exercice 69

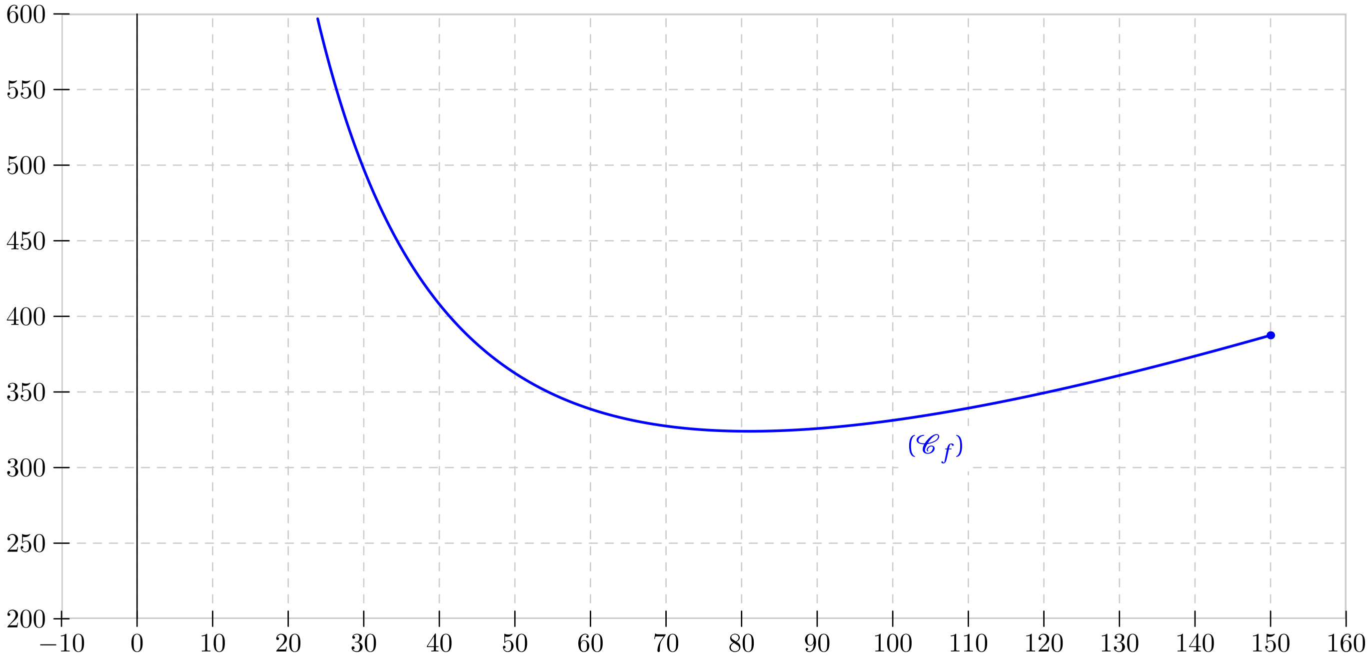
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [20\ ;\ 150]$ par

$$f(x) = 2x + \frac{13\,122}{x}.$$

1) Montrer que sur l'intervalle I , $f'(x) = \frac{2}{x^2}(x-81)(x+81)$. En déduire que sur l'intervalle I, $f'(x)$ est du signe de $(x-81)$.

2) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle I.

3) La représentation graphique de la fonction f est donnée ci-dessous. Déterminer avec la précision permise par le graphique, une valeur approchée des solutions de l'équation : $f(x) = 350$.



Partie B

Un responsable de club doit organiser un déplacement. Le trajet total est de $600\ km$ et le club dispose d'un bus dont la consommation en carburant, exprimée en litres par heure, est donnée par $\left(5 + \frac{v^2}{300}\right)$ où v représente la vitesse moyenne du véhicule en kilomètres par heure. Le prix du litre de carburant est de 1 € et le chauffeur est payé $16,87$ € par heure.

On rappelle que la vitesse moyenne est donnée par la formule $v = \frac{d}{t}$ où d est la distance parcourue, et t la durée du trajet.

1) On désigne par t la durée totale du trajet, exprimée en heures.

a. Exprimer t en fonction de v.

b. Démontrer que le coût du carburant, exprimé en euros, pour le trajet total est égal à

$$\frac{3\,000}{v} + 2v.$$

c. Montrer que le coût du transport, exprimé en euros, est égal à $f(v)$.

2) En utilisant la partie A :

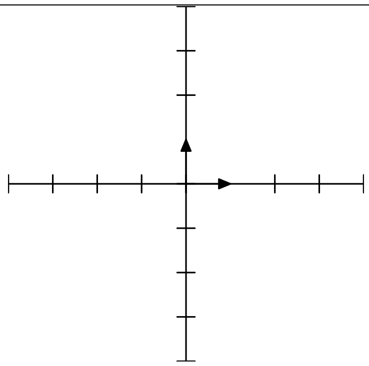
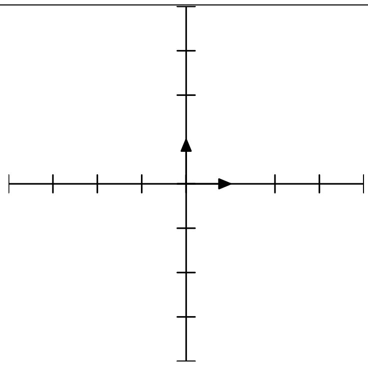
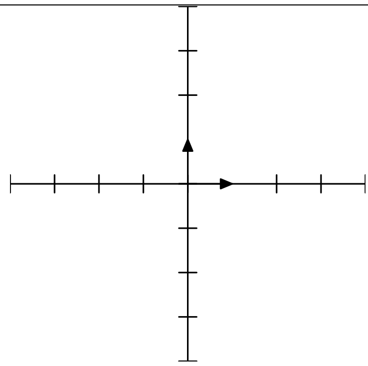
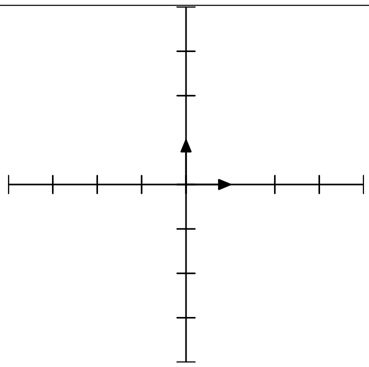
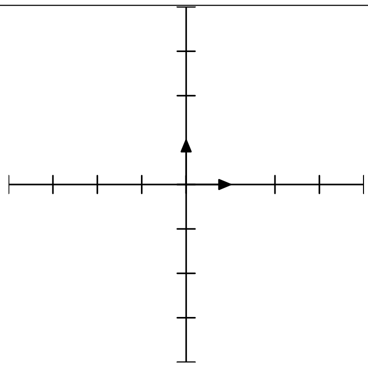
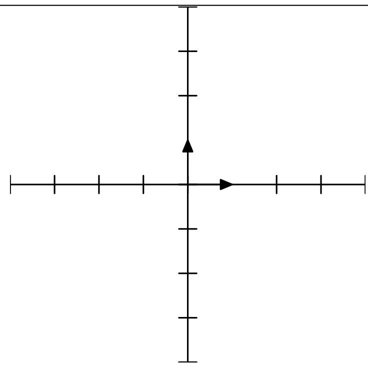
a. Donner la vitesse moyenne à laquelle doit rouler le bus pour que le coût du transport soit minimal. Quel est alors ce coût ?

b. Le responsable du club dispose d'au plus 350 € pour le transport. Pour des raisons de sécurité, la vitesse moyenne du bus ne peut dépasser 90 kilomètres par heure. Déterminer l'intervalle dans lequel doit se situer la vitesse moyenne du bus, pour que le coût du transport ne dépasse pas 350 €.

Exercice 70

On considère le trinôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$, et $\mathcal{P}$ sa représentation graphique dans un repère orthogonal. On note Δ son discriminant. Compléter : $\Delta = \ldots$.

Compléter le tableau suivant en traçant une allure possible de $\mathcal{P}$.

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Exercice 71

On souhaite déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-4}{2x^2+4x-6}}.$$

1) Déterminer les valeurs interdites du quotient $\dfrac{x-4}{2x^2+4x-6}$.

2) Étudier le signe de $\dfrac{x-4}{2x^2+4x-6}$.

3) En déduire l'ensemble de définition de f.

Exercice 72

Déterminer les ensembles de définition des fonctions f, g et h définies par :

$f : x \longmapsto \frac{x^2+3}{x-5}$ $g : x \longmapsto \sqrt{3x+2}$ $h : x \longmapsto \sqrt{x^2+1}$

Exercice 73

f et g sont deux fonctions définies sur $[-3\ ;\ 5]$. On a tracé ci-contre leurs représentations graphiques $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ dans un repère orthonormal. Les constructions demandées dans l'exercice sont à effectuer dans le repère ci-contre.

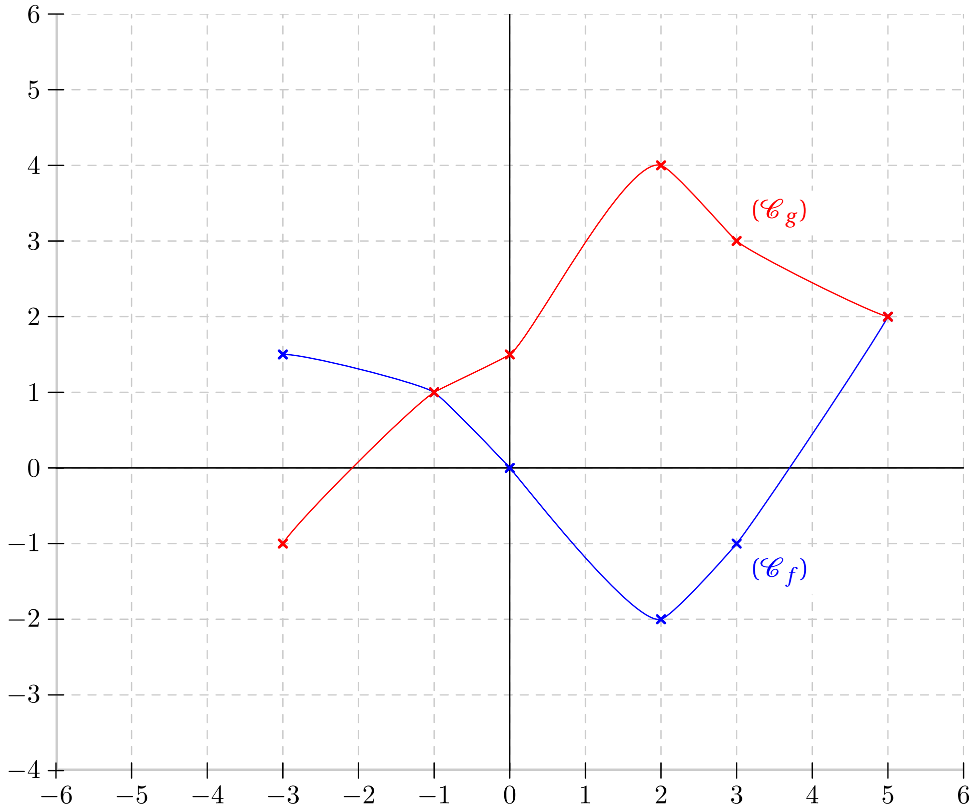
1) En observant le graphique, dresser le tableau de variations de chacune des deux fonctions.

2) Compléter le tableau de valeurs suivant (les lignes $f(x)$ et $g(x)$) :

x	-3	-1	0	2	3	5
$f(x)$						
$g(x)$						
$p(x)$						

3) **a)** Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.

b) Résoudre graphiquement l'équation $g(x) = f(x)$.



4) Soit p la fonction définie sur $[-3\ ;\ 5]$ par $p(x) = 2\ f(x)$, et t la fonction définie par $t(x) = f(x+2)$.

a) Compléter la dernière ligne du tableau de la question **2)**, puis tracer sur le graphique $(\mathcal{C}_p)$ la courbe représentative de la fonction p.

b) Déterminer l'ensemble de définition de t.

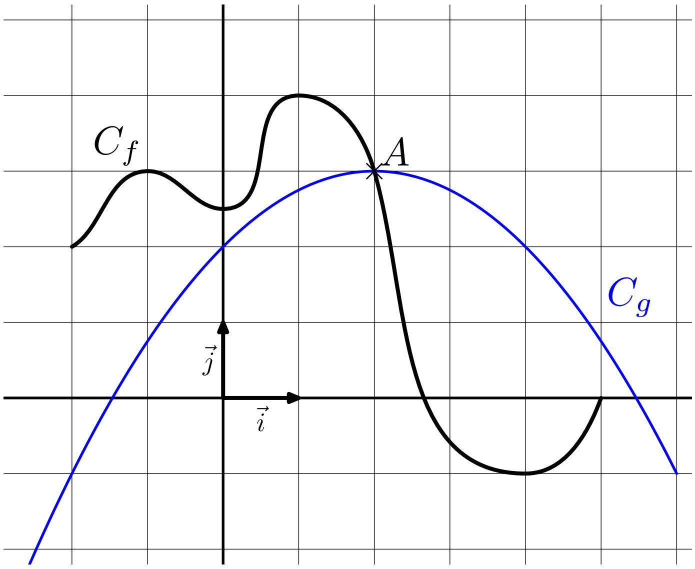
c) Compléter le tableau de valeurs suivant en vous aidant du tableau de la question **2)**.

x						
$t(x)$						

d) Par quelle transformation peut-on obtenir la courbe $(\mathcal{C}_t)$ à partir de $(\mathcal{C}_f)$? Tracer la courbe $(\mathcal{C}_t)$ dans le repère.

Exercice 74

Pour chacune des questions suivantes, une seule des réponses proposées est correcte. On entourera visiblement et sans rature la lettre correspondant à la réponse choisie.
Pour chaque question, une bonne réponse rapporte 1 point, une mauvaise réponse retire 0,5 point, et une non-réponse vaut 0 point. En cas de total négatif, la note sera ramenée à 0.
On a tracé ci-dessous les représentations graphiques d'une fonction f et de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + 2$.



1) La fonction f est définie sur :

- **a)** $[-2\ ;\ 5]$
- **b)** $[-1\ ;\ 4]$
- **c)** $\mathbb{R}$
- **d)** le graphique.

2) L'équation $g(x) = f(x)$,

- **a)** a une unique solution : A.
- **b)** a une unique solution : $x = 2$.
- **c)** a une unique solution : $y = 3$.
- **d)** n'a pas de solution.

3) On admet que $(\mathcal{C}_f)$ passe par $B(2{,}7\ ;\ 0)$. La solution de l'inéquation $f(x) > 0$ est :

- **a)** $\mathcal{S} = \mathbb{R}_+$.
- **b)** $\mathcal{S} =]-\infty\ ;\ 2{,}7[$.
- **c)** $\mathcal{S} = \mathbb{R}_+^*$.
- **d)** $\mathcal{S} = [-2\ ;\ 2{,}7[$.

4) Soit h la fonction définie par :
$h(x) = f(x+2)$.
La courbe représentant h est :

- **a)** la symétrique de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (Ox).
- **b)** l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par la translation de vecteur $2\vec{i}$.
- **c)** l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par la translation de vecteur $-2\vec{i}$.
- **d)** l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par la translation de vecteur $2\vec{j}$.

5) On considère la symétrique de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (Oy). Cette courbe est la représentation graphique de la fonction :

- **a)** $x \longmapsto |f(x)|$.
- **b)** $x \longmapsto f(x) - 2$.
- **c)** $x \longmapsto -f(x)$.
- **d)** $x \longmapsto f(-x)$.

Exercice 75

Soit f la fonction définie sur $I = [-4\ ;\ 2]$ par : $f(x) = 2x^3 + 4{,}5x^2 - 6x - 6$.

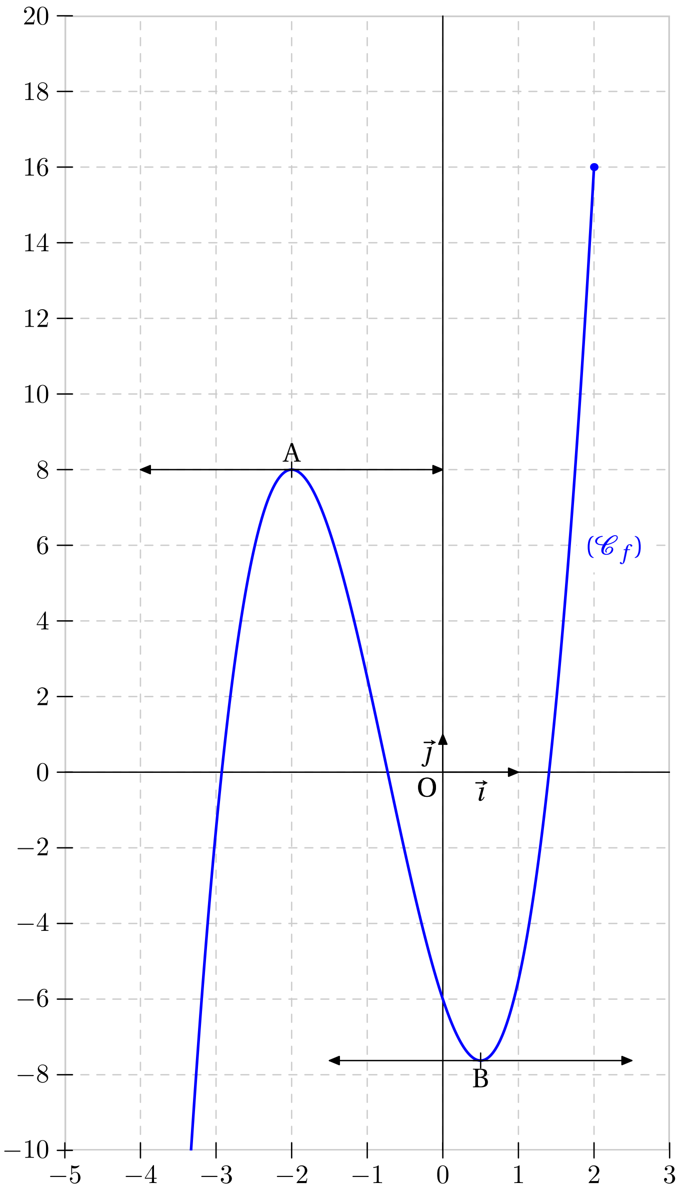
1) Calculer la dérivée de la fonction f sur I.

2) Déterminer les solutions de l'équation $f'(x) = 0$.

3) En déduire le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

4) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

Illustration



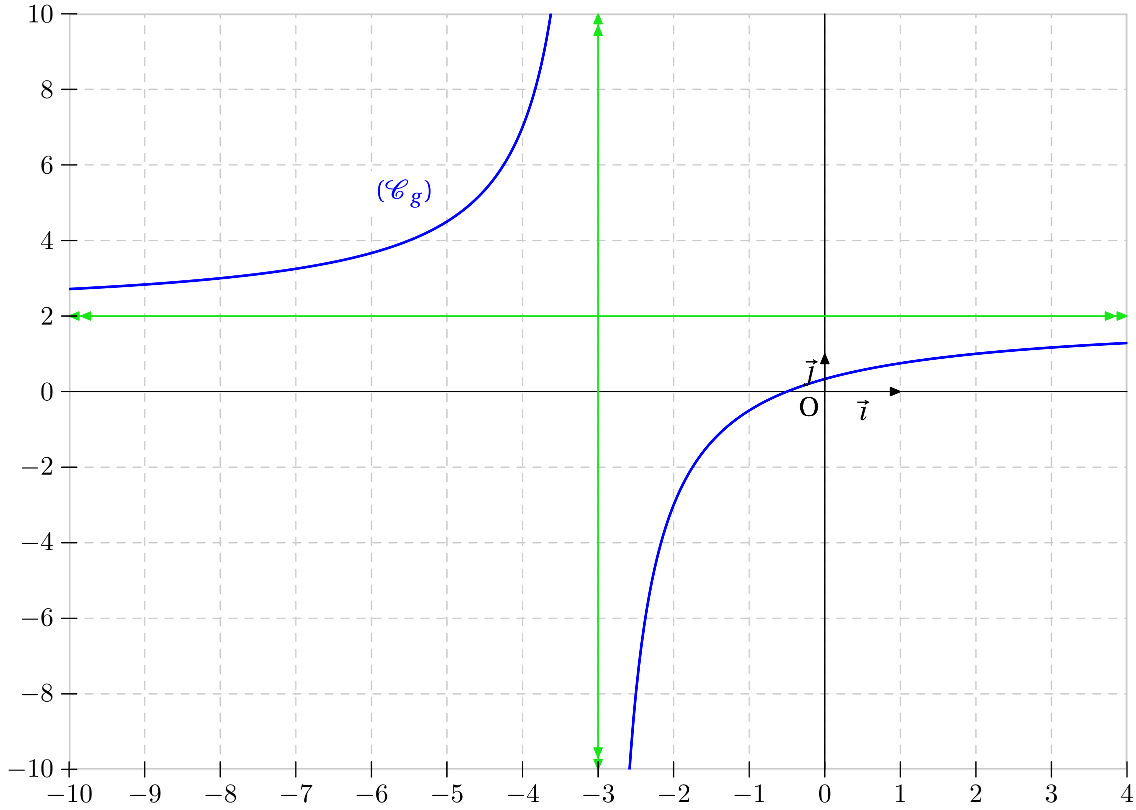
Exercice 76

Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{2x+1}{x+3}$.

1) Déterminer $\mathcal{D}_g$, l'ensemble de définition de g.

2) Calculer $g'(x)$ pour $x \in \mathcal{D}_g$.

Illustration



Exercice 77

Soit h la fonction définie sur $J = [-8\ ;\ 4]$ par $h(x) = 0{,}5x^2 + 2x - 6$. On note $\mathcal{C}_h$ la courbe représentative de h dans un repère $(O\ ;\ \vec{i}\,,\ \vec{j}\,)$.

1) Résoudre l'équation $h(x) = 0$. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}_h$?

2) Calculer $h'(x)$ pour $x \in J$. En déduire le signe de $h'(x)$ en fonction des valeurs de x.

3) Que peut-on dire de la tangente à $\mathcal{C}_h$ au point S d'abscisse -2 ? Calculer l'ordonnée de S. Placer S dans le repère ainsi que la tangente à $\mathcal{C}_h$ en S.

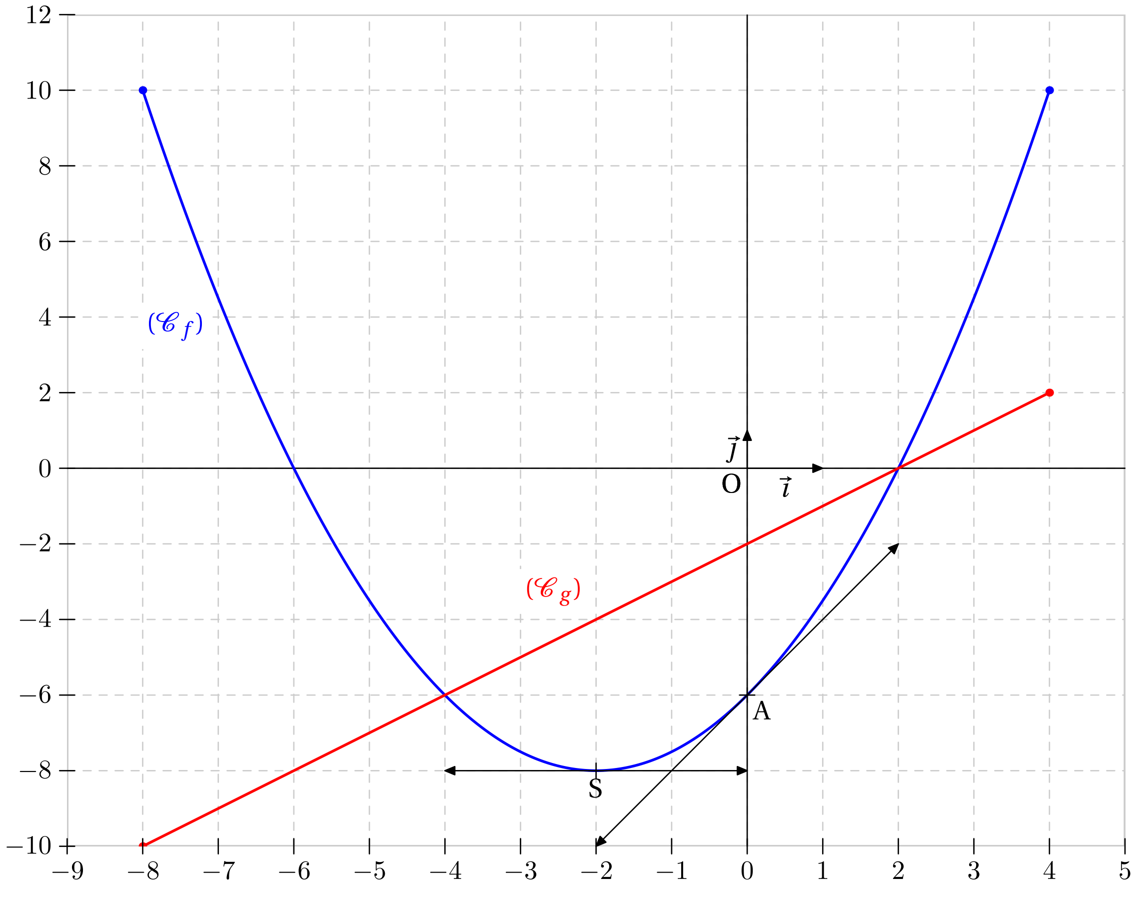
4) Calculer les coordonnées du point A, intersection de $\mathcal{C}_h$ avec l'axe des ordonnées. Placer le point A dans le repère.

5) Calculer le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_h$ au point A. Tracer cette tangente dans le repère.

6) Tracer la courbe $\mathcal{C}_h$.

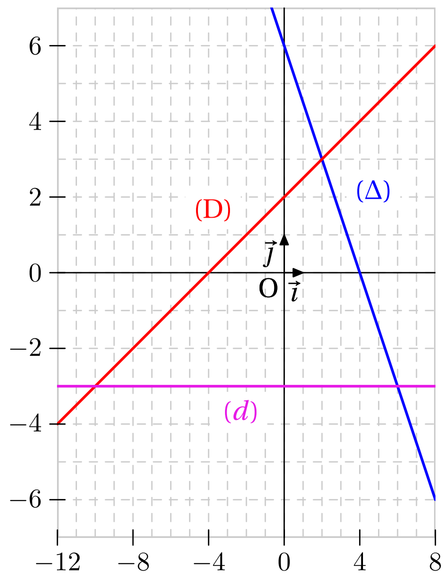
7) Dans le repère précédent on tracer la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x - 2$. Résoudre graphiquement l'inéquation $h(x) \leqslant x - 2$.

Illustration



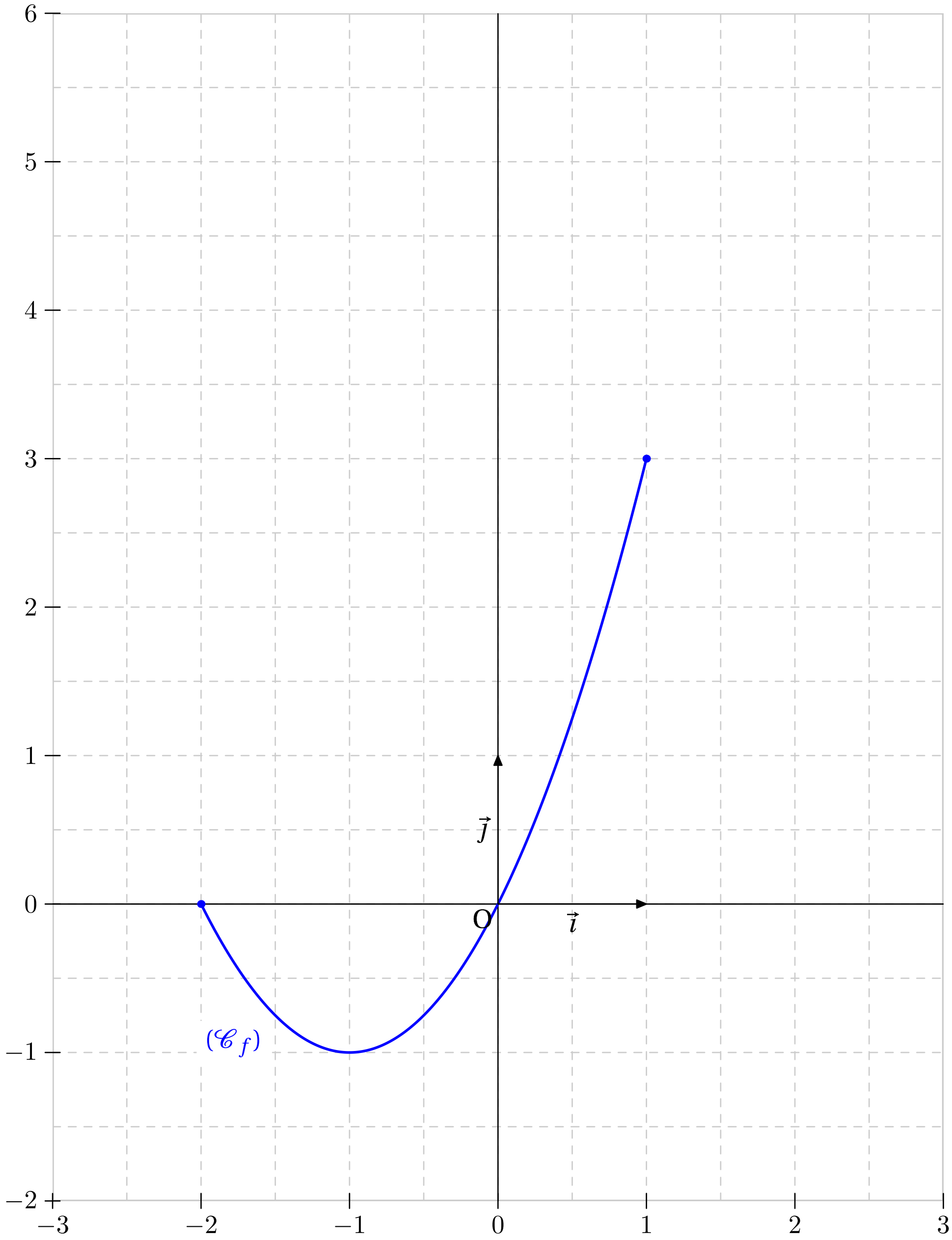
Exercice 78

Pour chacune des questions ci-dessous, plusieurs réponses sont proposées et une seule est exacte.
Vous devez cocher la réponse exacte sans justification.
Une bonne réponse rapporte un point.
Une mauvaise réponse enlève 0,5 point. L'absence de réponse vaut 0 point. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice sera ramenée à 0.
Les trois premières questions se rapportent au graphique ci-contre.



QUESTIONS	RÉPONSES
1. La droite (Δ) a pour équation…	☐ $y = 1{,}5x + 6$ ☐ $3x + 2y - 12 = 0$ ☐ $x = 4$ et $y = 6$
2. Quelle est la solution du système suivant ? $\begin{cases} 1{,}5x + y = 6 \\ -x + 2y = 4 \end{cases}$	☐ $(6\ ;\ -3)$ ☐ $(2\ ;\ 3)$ ☐ $(-10\ ;\ -3)$ ☐ $(3\ ;\ 2)$
3. Le coefficient directeur de la droite (d) est…	☐ -3 ☐ il n'y en a pas ☐ 0
4. Dire que la droite (d) d'équation $ux + vy + w = 0$ et la droite (d') d'équation $u'x + v'y + w' = 0$ sont parallèles équivaut à dire que…	☐ $uu' = vv'$ ☐ $u = u'$ et $v = v'$ ☐ $uv' = u'v$ ☐ $uvw = u'v'w'$

Exercice 79



Dans un repère, on a tracé la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[-2\ ;\ 1]$.

1) Déterminer graphiquement :

a) Les images de $0,5$ et de $-0,5$.

b) Les éventuels antécédents de $-0,5$.

c) Les valeurs de x pour lesquelles $-0,5 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

2) Soit m un réel. Déterminer, selon la valeur de m, le nombre d'antécédents de m par f.

3) Tracer sur la feuille annexe les courbes représentatives des fonctions g, h et k suivantes :

a) $g : x \longmapsto f(x-2)-1$ **b)** $h : x \longmapsto |f(x)|$ **c)** $k : x \longmapsto 2\ f(x)$

Exercice 80

Une personne possède deux téléphones : un téléphone fixe et un téléphone portable.
Sur le graphique en annexe, les mois sont représentés en abscisse et les dépenses, en euros, en ordonnée.
La courbe $(\mathcal{C}_f)$ passe par les points représentant les dépenses mensuelles sur le téléphone fixe.
La courbe $(\mathcal{C}_p)$ passe par les points représentant les dépenses mensuelles sur le téléphone portable.

1) **a)** Lire sur le graphique les dépenses au mois de mai pour chaque téléphone.

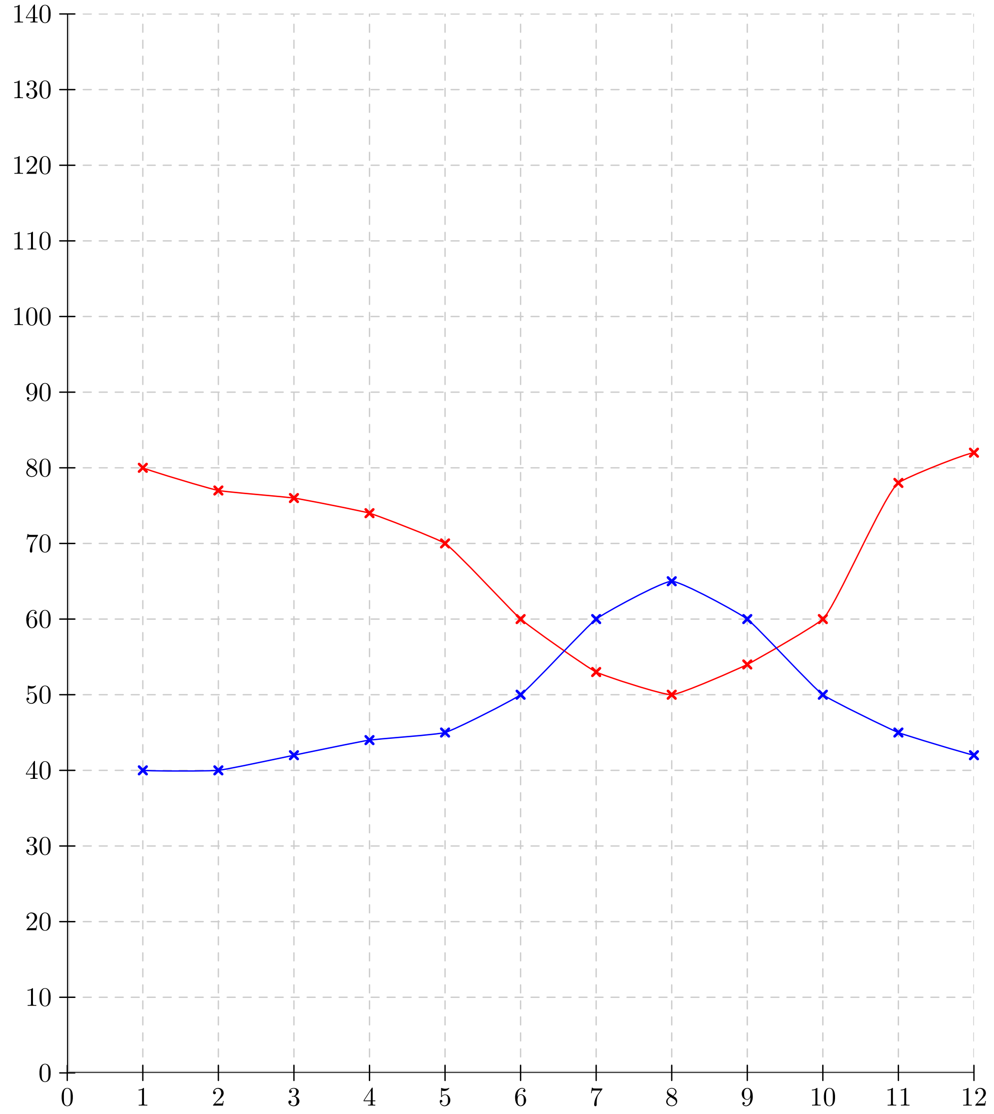
b) Pour chaque téléphone, lire sur le graphique les mois au cours desquels la consommation a été de 60 euros.

2) En quels mois les dépenses sont plus élevées pour le téléphone portable que pour le téléphone fixe.

3) Quel est le maximum de p ? le minimum de f ? En quels mois ces extremums sont-ils atteints ? Quelle situation concrète peut expliquer ce résultat ?

4) Tracer à partir des courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_p)$ la courbe représentant les dépenses téléphoniques totales.
Quand ces dépenses ont-elles été les plus faibles ?

5) Tracer à partir de $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_p)$ la courbe représentant la différence des dépenses téléphoniques.



Exercice 81

Monsieur Deschamps fabrique des yaourts qu'il commercialise sous la marque « Yaourts Des Champs ».
Il fait distribuer des prospectus publicitaires dans les boîtes à lettres et il estime qu'après la distribution de x milliers de prospectus, la probabilité qu'une personne connaisse les « Yaourts Des Champs » s'exprime par la fonction f définie par :

$f(x) = \dfrac{4x+1}{5x+5}$ où x appartient à l'intervalle $[0\ ;\ 11]$.

1) **a)** Déterminer $f'(x)$.

b) En déduire le tableau de variations de f.

c) Faire le tableau de valeurs de la fonction f de 0 à 11 par pas de 1.

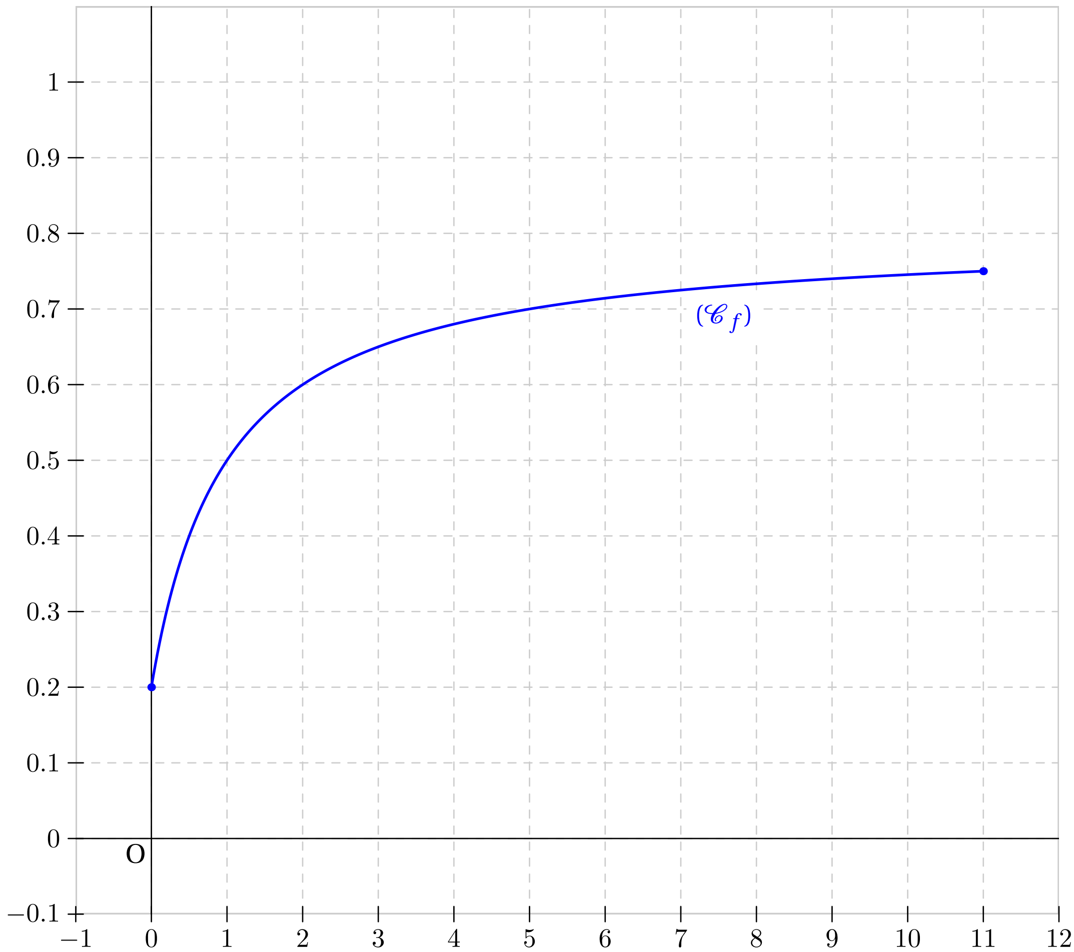
2) Grâce à la question précédente, déterminer le nombre de prospectus qu'il faut distribuer pour que la probabilité qu'une personne connaisse les « Yaourts Des Champs » soit égale à :

a) $0,7$ puis $0,75$.

b) En déduire le nombre de prospectus supplémentaires qu'il faut distribuer pour que la probabilité qu'une personne connaisse les « Yaourts Des Champs » passe de $0,7$ à $0,75$.

3) Monsieur Deschamps décide de ne faire distribuer que $5\,000$ prospectus. Expliquer son choix.

Illustration



Exercice 82

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 30x^2 + 225x$.

1) **a)** Déterminer la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $f'(x)$ peut se mettre sous la forme $f'(x) = 3(x-15)(x-5)$.

c) En déduire le tableau de variations de la fonction f.

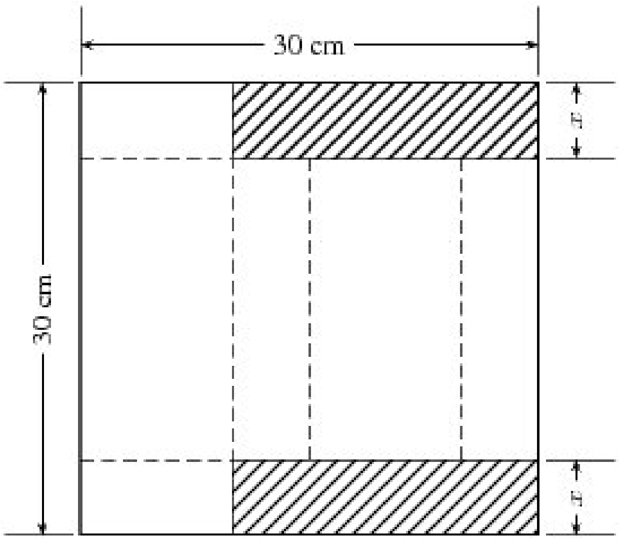
2) Donner les équations des tangentes T_A et T_B à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ aux points d'abscisse 0 et 10.

3) Tracer soigneusement $(\mathcal{C}_f)$, T_A et T_B (on prendra 1 cm pour 2 unités sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 50 unités sur l'axe des ordonnées).

Partie B

Un fabriquant envisage la production de boîtes de lait en carton obtenues en découpant deux bandes (hachurées sur le dessin) de même largeur x (en cm) dans une feuille carrée de côté 30 cm et pliant suivant les pointillés.

1) Dans quel intervalle varie x ?

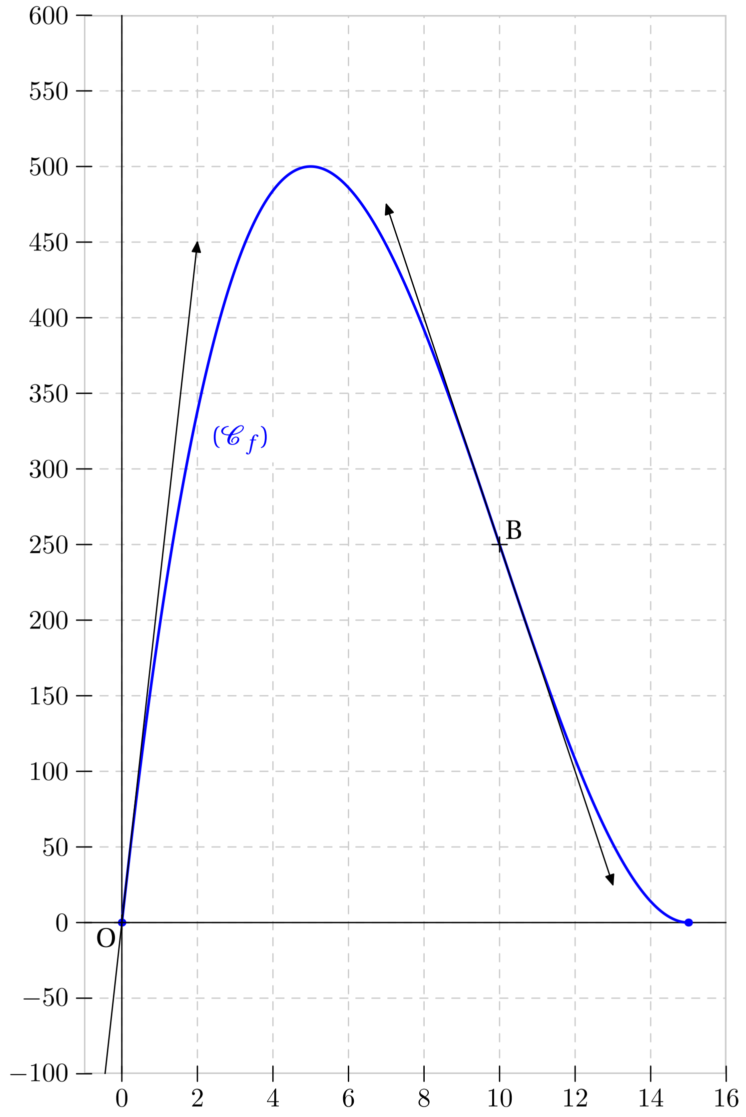


2) Déterminer le volume de la boîte lorsque $x = 10$ (on pourra s'aider d'un dessin à l'échelle).

3) Exprimer le volume V de la boîte (en cm^3) en fonction de x et montrer que : $V(x) = 2f(x)$.

4) Pour quelle valeur de x le volume de la boîte est-il maximal ?

Illustration



Exercice 83

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 3$ (ce type de fonctions est appelé **fonction trinôme du second degré**).

1) Démontrer que, pour tout réel x, on a $f(x) = (x-2)^2 - 1$ (ceci est ce que l'on appellera dans un prochain chapitre la **forme canonique** du trinôme...)

2) En déduire par quelle transformation géométrique on passe de la parabole $\mathcal{P}$ représentant la fonction $x \mapsto x^2$ à la courbe $\mathcal{C}$ représentant la fonction f.

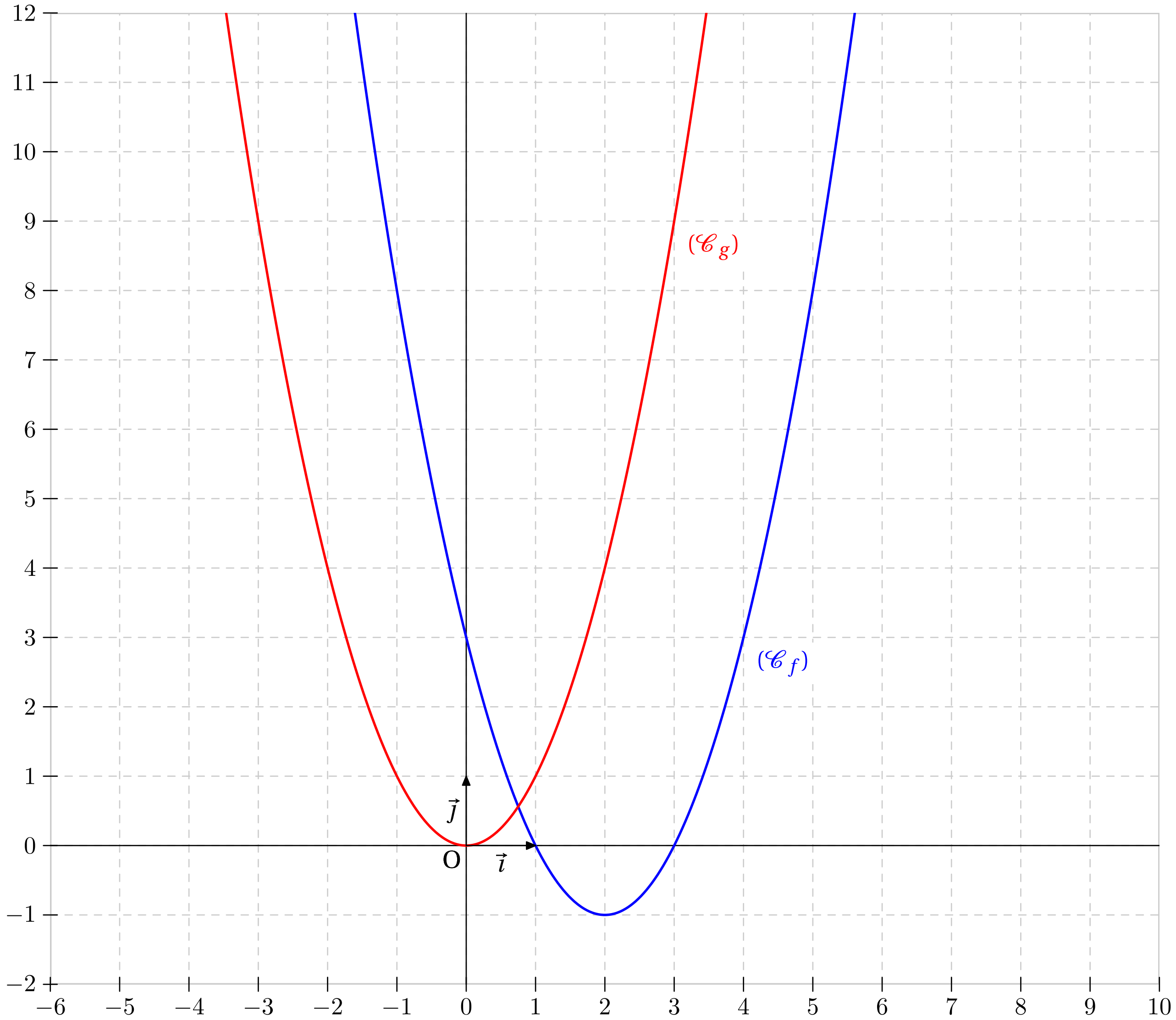
3) Dresser le tableau des variations de la fonction f.

4) Tracer précisément la courbe $\mathcal{C}$.

5) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$. Retrouver le résultat par le calcul, en remarquant que $(x-2)^2 - 1 = (x-2)^2 - 1^2 = ...$ et en se ramenant à une équation de type "produit nul".

6) Déterminer le signe de la fonction f selon les valeurs de x (on pourra présenter les résultats dans un tableau de signes).

Illustration



Exercice 84

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $\quad g(x) = -\dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{2}{3}x + 1$

1) Tracer précisément la parabole $\mathcal{P}'$ représentant la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{3}x^2$ à partir de la parabole $\mathcal{P}$ représentant la fonction carré.

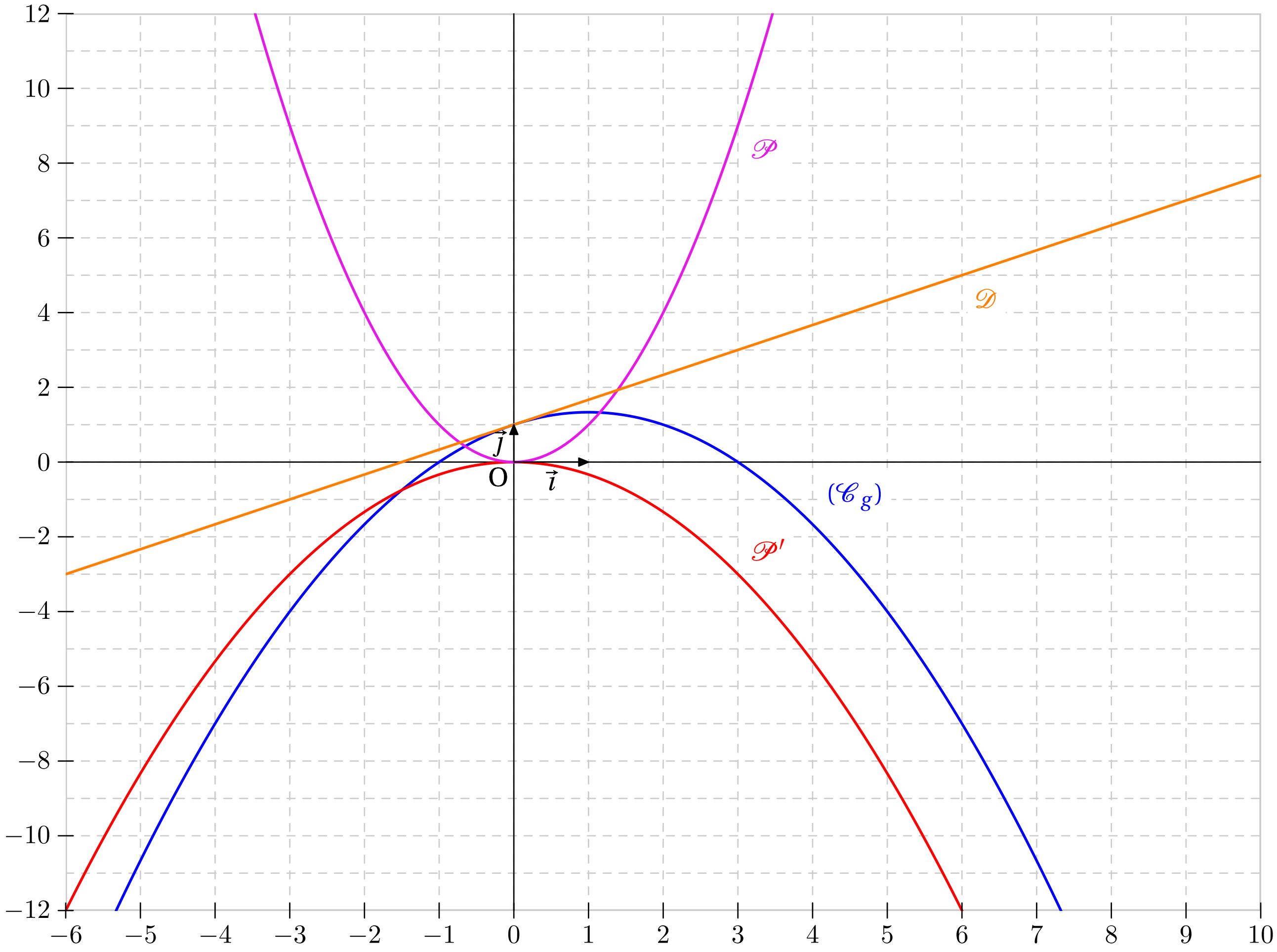
2) Tracer la droite $\mathcal{D}$ représentant la fonction affine $x \mapsto \dfrac{2}{3}x + 1$.

3) Quel est le sens de variation de la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{3}x^2$ sur $]-\infty\ ;\ 0]$? de la fonction $x \mapsto \dfrac{2}{3}x - 1$ sur $]-\infty\ ;\ 0]$? En déduire le sens de variations de la fonction g sur $]-\infty; 0]$. Peut-on déterminer le sens de variations de g sur $[0\ ;\ +\infty[$?

4) Tracer très précisément -en bleu- la courbe $(\mathcal{C}_g)$ représentant la fonction g sur le même graphique que $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{D}$.

5) Résoudre graphiquement l'équation $g(x) = 0$.

Illustration



Exercice 85

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par $h(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$ (ce type de fonctions est appelé **fonction homographique**).

1) Par quelle transformation géométrique passe-t-on de l'hyperbole $\mathcal{H}$ représentant la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ à l'hyperbole $\mathcal{H}'$ représentant la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$. Tracer précisément $\mathcal{H}'$ sur le graphique ci-dessous.

2) Démontrer que, pour tout réel x, on a $h(x) = 2 - \dfrac{1}{x+1}$.

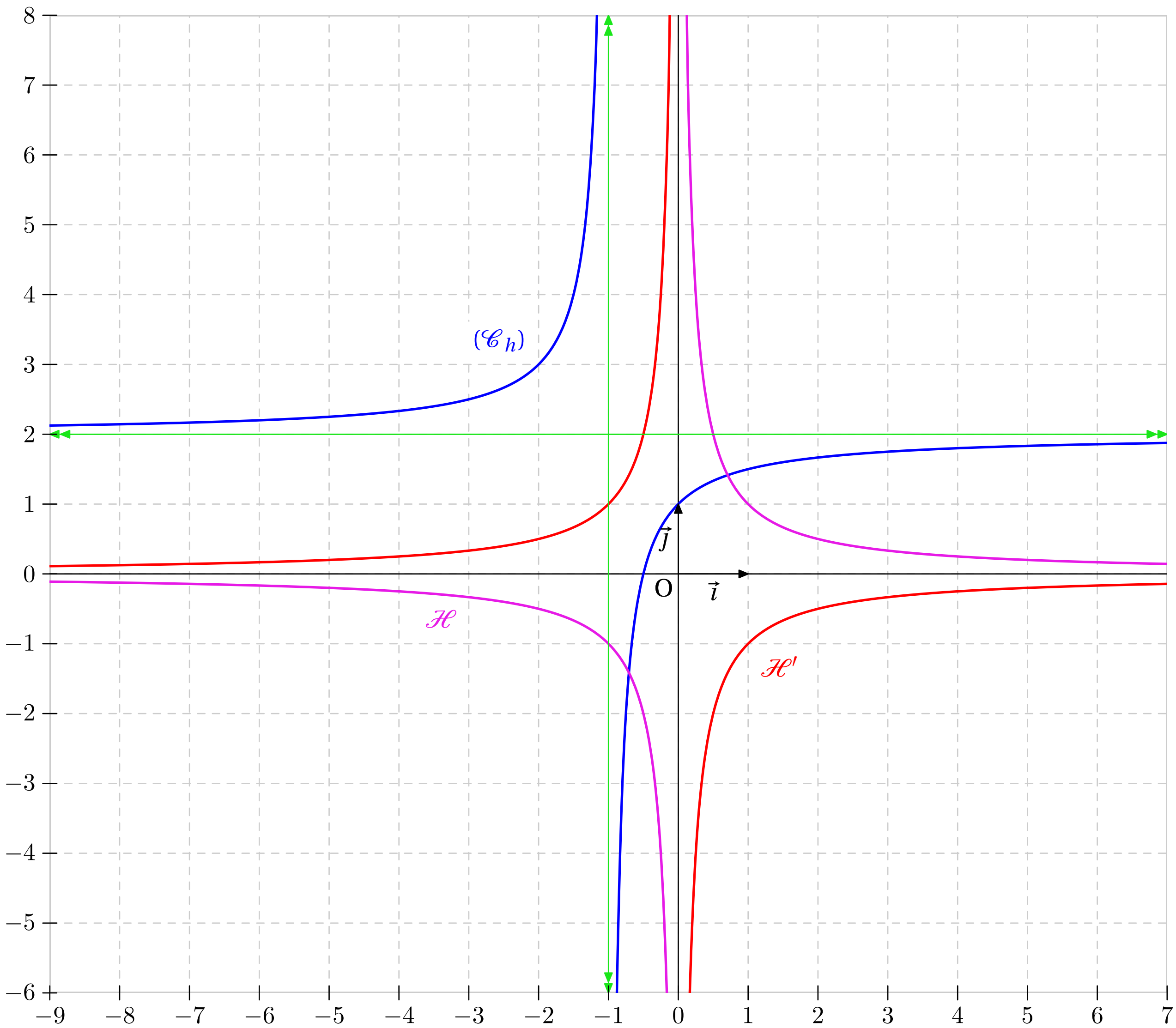
3) En déduire par quelle transformation géométrique on passe de l'hyperbole $\mathcal{H}'$ représentant la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ à la courbe $\mathcal{C}$ représentant la fonction h.

4) Dresser le tableau des variations de la fonction h.

5) Tracer précisément -en bleu - la courbe $(\mathcal{C}_h)$ sur le graphique ci-dessous.

6) Résoudre graphiquement les équations $h(x) = 0$ et $h(x) = 3$. Retrouver ces résultats par le calcul.

Illustration



Exercice 86

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par $h(x) = \frac{-x^2+3}{x+1}$

1) Démontrer que, pour tout réel x différent de -1, on a $h(x) = -x+1+\frac{2}{x+1}$.

2) Tracer successivement les hyperboles $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ représentant respectivement les fonctions $x \mapsto \frac{2}{x}$ et $x \mapsto \frac{2}{x+1}$.

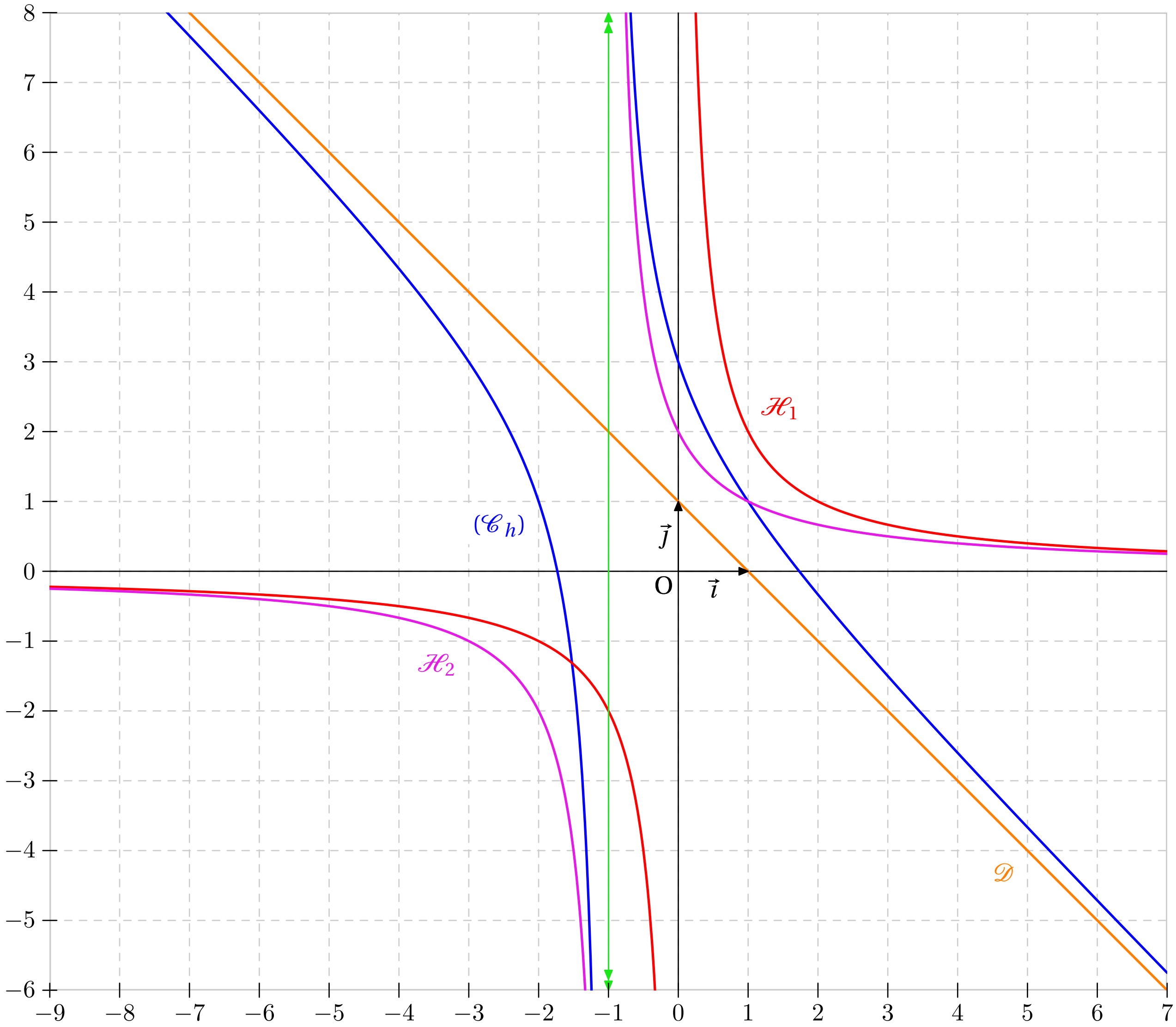
3) Tracer la droite $\mathcal{D}$ représentant la fonction affine $x \mapsto -x+3$ sur ce même graphique.

4) Démontrer que la fonction $x \mapsto \frac{2}{x+1}$ est décroissante sur $]-\infty;-1[$. Quel est le sens de variation de la fonction affine $x \mapsto -x+1$ sur $]-\infty;-1[$?

5) En déduire le sens de variations de la fonction h sur $]-\infty;-1[$. Peut-on déterminer le sens de variations de h sur $]-1;+\infty[$?

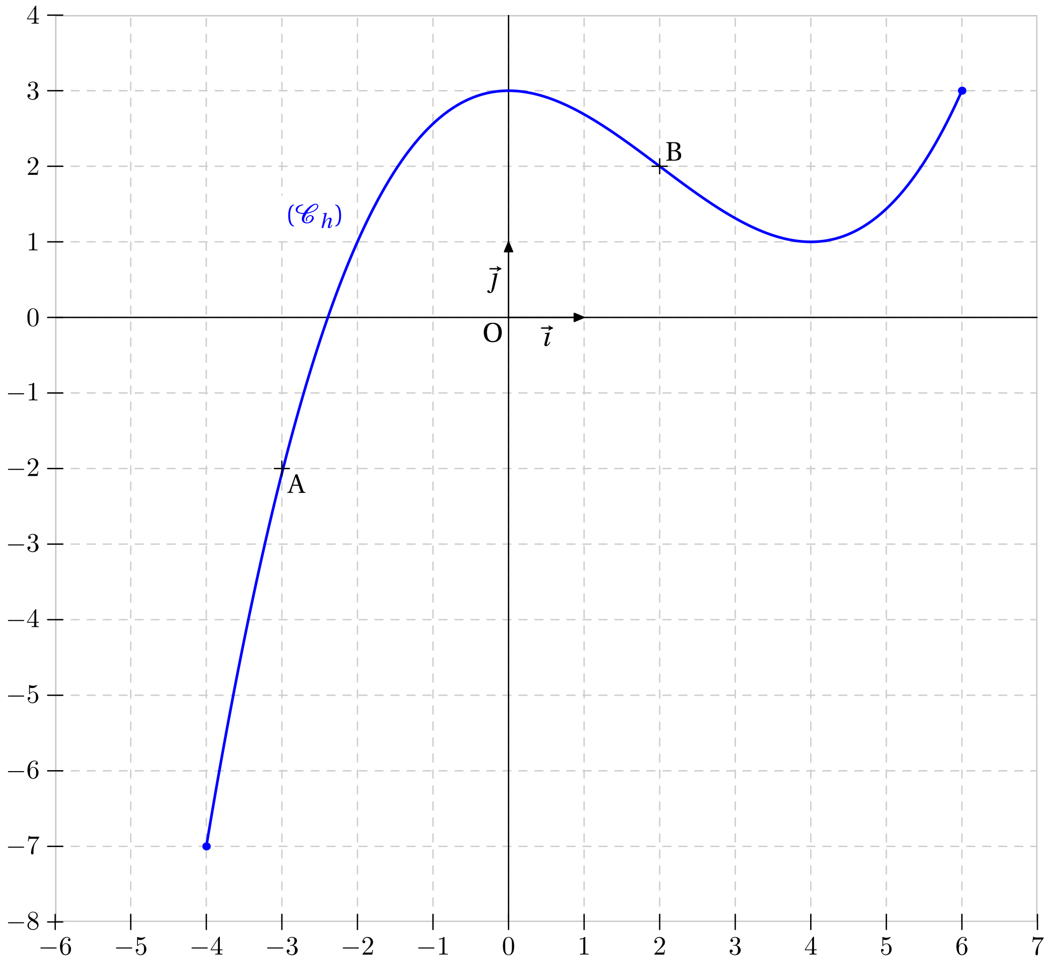
6) Tracer très précisément -en bleu - la courbe $\mathcal{C}_h$ représentant la fonction k sur le même graphique que les autres.

Illustration



Exercice 87

Voici la représentation graphique $\mathcal{C}$ d'une fonction f dans un repère orthonormal :



1) Quel est l'intervalle de définition I de cette fonction f ?

2) Déterminer graphiquement les images des nombres -4, 0, 2 et 6.

3) Déterminer graphiquement les valeurs exactes (ou approchées s'il y a lieu) du (ou des) antécédent(s) de -2 et de 1.

4) Donner les valeurs de $f(-3)$, $f(-2)$, $f(4)$.

5) Résoudre (en donnant des valeurs approchées des solutions s'il y a lieu) sur I les équations $f(x) = -2$,$f(x) = 3$, $f(x) = 4$.

6) Déterminer une valeur approchée du nombre α, unique solution de l'équation $f(x) = 0$.

7) Donner le signe de la fonction f selon les valeurs de x (vous présenterez les résultats dans un tableau).

8) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant -2$.

9) Donner les variations de la fonction f (vous dresserez le tableau des variations de f).

10) Quel est le maximum de la fonction f sur I ? En quelle(s) valeur(s) est-il atteint ?

11) Quel est le minimum de la fonction f sur I ? sur $[0\ ;\ 6]$?

12) Tracer le segment de droite joignant les points A et B. Ce segment est la représentation graphique d'une fonction g définie sur I ; de quel type est cette fonction g ? sous quelle forme s'écrit son expression algébrique ?

13) Déterminer (graphiquement, ou par le calcul, au choix) l'expression de la fonction g définie sur I.

14) Résoudre graphiquement les équations $g(x) = 0$ et $g(x) = f(x)$.

15) Résoudre graphiquement les inéquations $g(x) > 0$ et $g(x) \leqslant f(x)$.

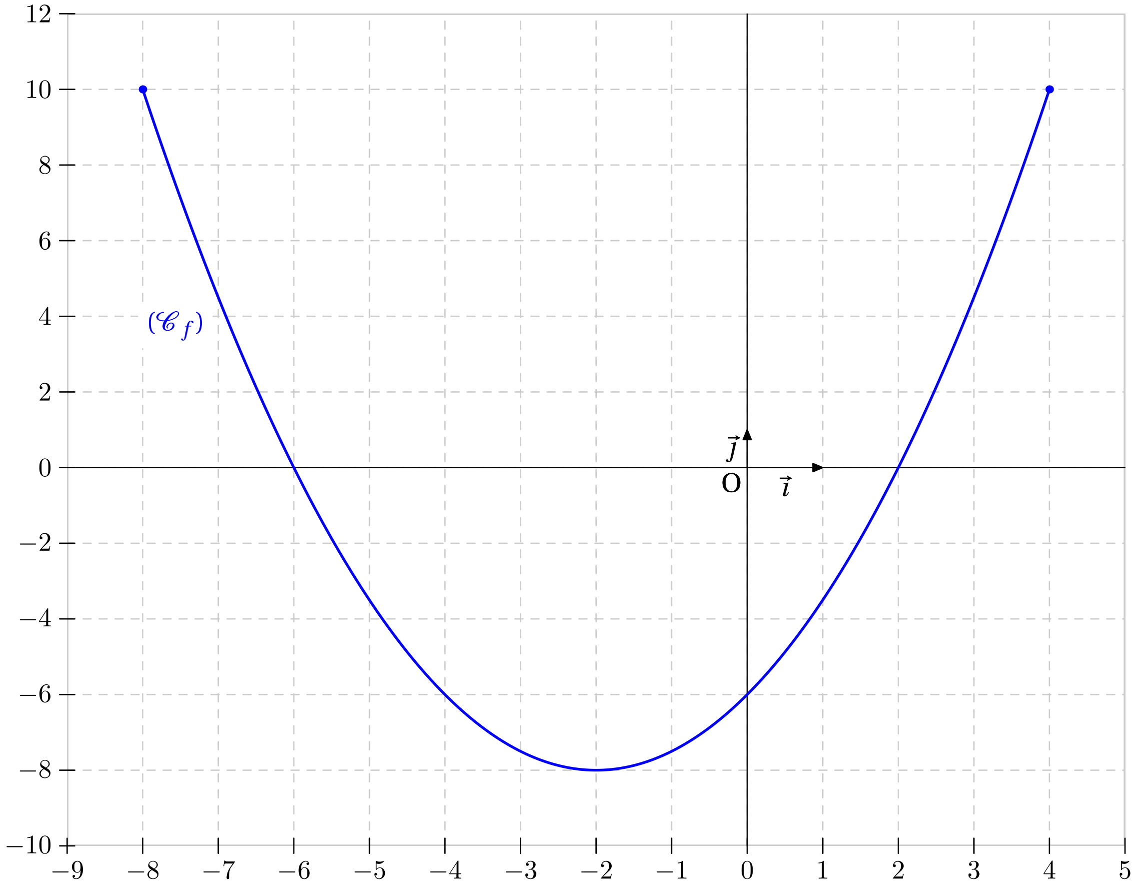
Exercice 88

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$.

1) À l'aide de la calculatrice, calculer le nombre dérivé de f en 1.

2) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T_A) au point A d'abscisse 1 à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

Exercice 89



Soit h la fonction définie sur $J = [-8\ ;\ 4]$ par $h(x) = 0{,}5x^2 + 2x - 6$. On note $\mathcal{C}_h$ la courbe représentative de h dans un repère $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$.
On donne $h'(-2) = 0$ et $h'(0) = 1$.

1) Résoudre l'équation $h(x) = 0$. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}_h$?

2) Que peut-on dire de la tangente à $\mathcal{C}_h$ au point S d'abscisse -2 ? Calculer l'ordonnée de S. Placer S dans le repère ainsi que la tangente à $\mathcal{C}_h$ en S.

3) Calculer les coordonnées du point A, intersection de $\mathcal{C}_h$ avec l'axe des ordonnées. Placer le point A dans le repère.

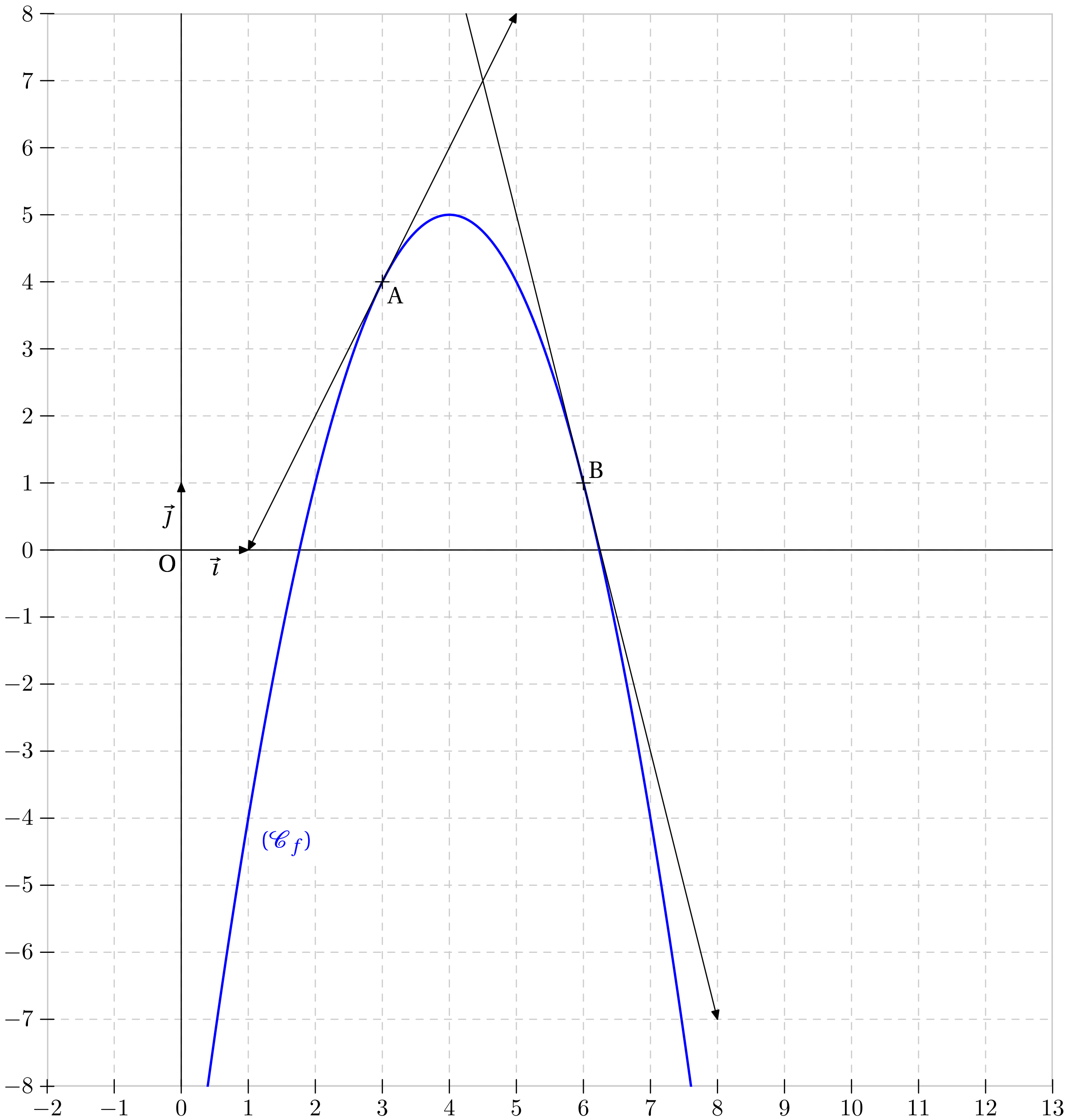
4) Quel est le coefficient directeur de la tangente (T_A) à $\mathcal{C}_h$ au point A. Tracer cette tangente dans le repère.

5) Dans le repère précédent, tracer la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x - 2$. Résoudre graphiquement l'inéquation $h(x) \leqslant x - 2$.

Exercice 90

Donner le tableau de signes de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-3)(-x+4)(x+3)$.

Exercice 91



Le graphique ci-dessus représente la courbe $(\mathcal{C}_f)$ d'une fonction f, ainsi que deux tangentes á $(\mathcal{C}_f)$ en deux points A et B.

1) **a)** Retrouver graphiquement $f(3)$ et $f'(3)$.

b) Déterminer une équation de la tangente (T_A) à $(\mathcal{C}_f)$ en A.

2) **a)** Retrouver graphiquement $f(6)$ et $f'(6)$.

b) Déterminer une équation de la tangente (T_B) à $(\mathcal{C}_f)$ en B.

3) Donner sans justifier le tableau de variations de f.

4) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = -4$. On rédigera soigneusement.

Exercice 92

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 2x^3 + 4x - 3$.

1) Dériver $f(x)$.

2) Déterminer l'équation de la tangente (T_A) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point A d'abscisse 1.

3) En se référant à l'allure de $(\mathcal{C}_f)$, pensez-vous que la dérivée de f puisse s'annuler ?

Exercice 93

Soit la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$.

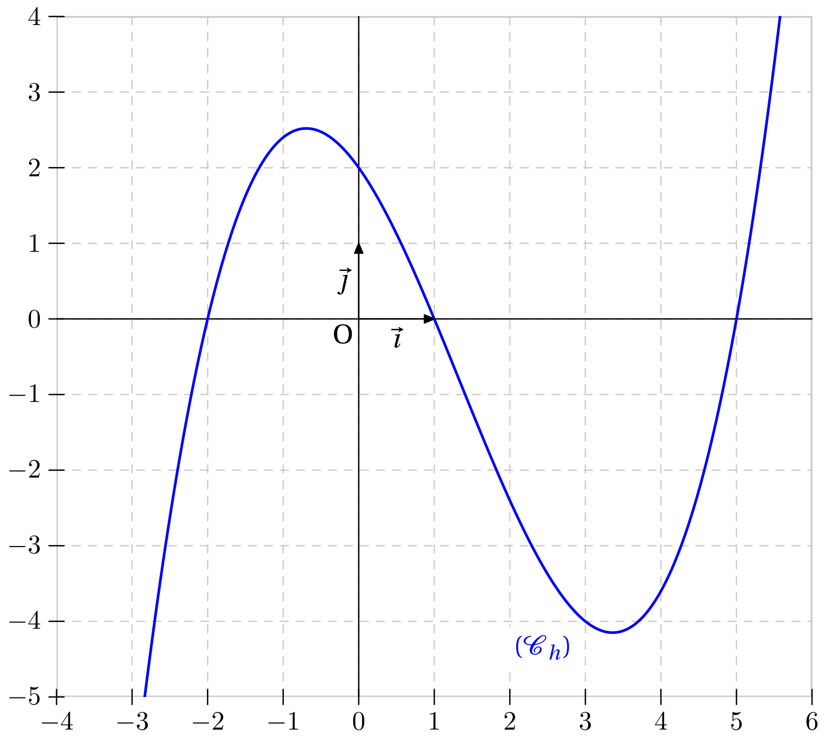
1) Quel est la valeur interdite de g ?

2) Calculer $g'(x)$.

3) Quel est le signe de $g'(x)$?

4) Donner le tableau de variation de g.

Exercice 94



$(\mathcal{C}_h)$ est la courbe représentative d'une fonction h définie sur $\mathbb{R}$.

1) Donner le tableau de signes de h.

2) En déduire le tableau de variations d'une fonction H ayant pour dérivée h.

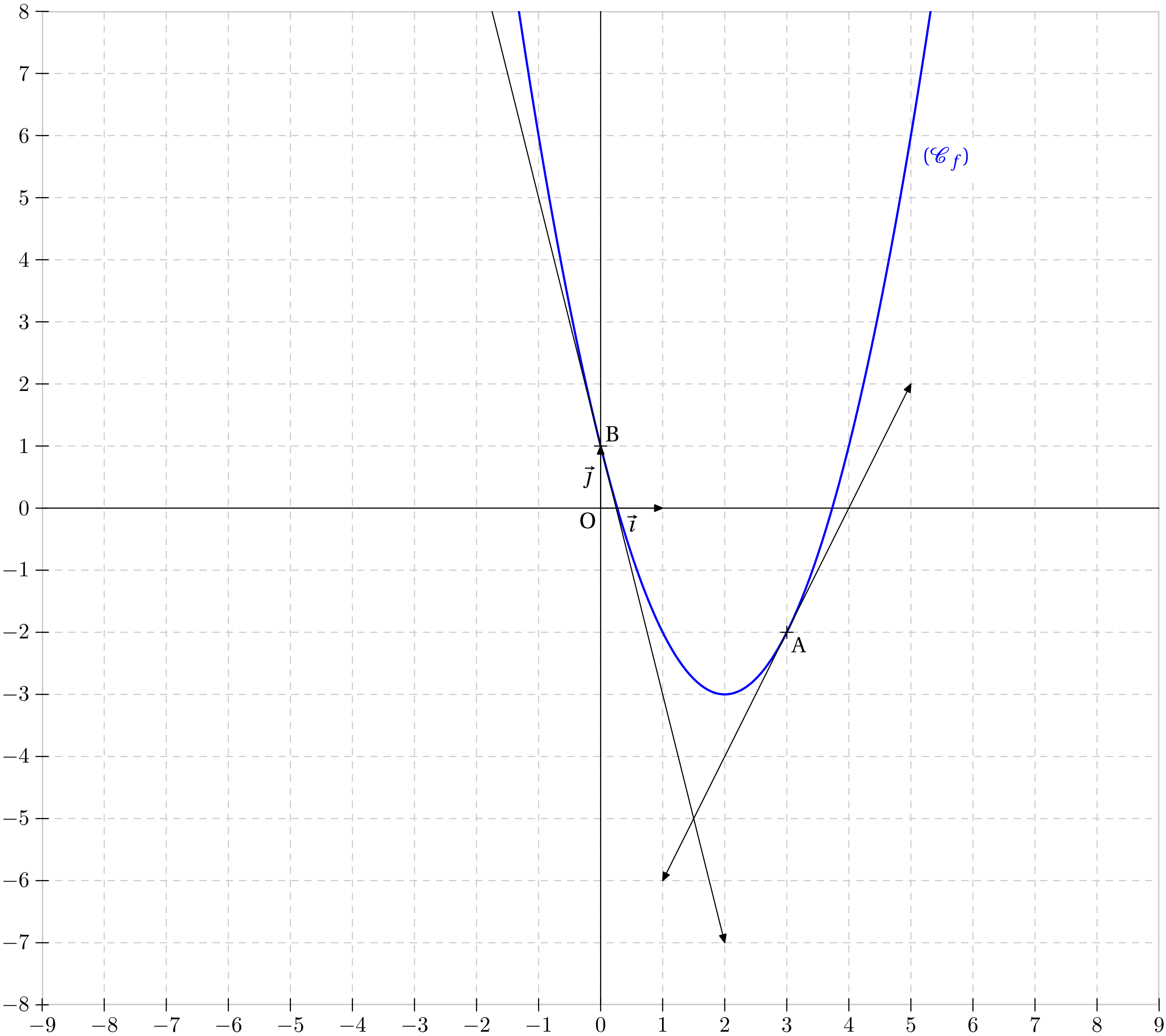
Comme il y a une infinité de fonctions H, on ne pourra donner les valeurs de $H(x)$!

Exercice 95

On donne $g(x) = \dfrac{4x+3}{2x+1}$.

Calculer $g'(x)$.

Exercice 96



Le graphique ci-dessus représente la courbe $(\mathcal{C}_f)$ d'une fonction f, ainsi que deux tangentes á $(\mathcal{C}_f)$ en deux points A et B.

1) **a)** Retrouver graphiquement $f(3)$ et $f'(3)$.

b) Déterminer une équation de la tangente (T_A) à $(\mathcal{C}_f)$ en A.

2) **a)** Retrouver graphiquement $f(0)$ et $f'(0)$.

b) Déterminer une équation de la tangente (T_B) à $(\mathcal{C}_f)$ en B.

3) Donner sans justifier le tableau de variations de f.

4) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = -2$. On rédigera soigneusement.

Exercice 97

Une entreprise fabrique chaque mois une certaine quantité de pneus. Le coût de cette fabrication est donné en euros, pour q dizaines de pneus produits, par l'expression suivante : $C(q) = \dfrac{250}{q} + 0,001q + 100$.

Déterminer le nombre de dizaines de pneus qu'il faut fabriquer pour que le coût correspondant soit minimal.

Exercice 98

Soit la fonction f définie sur $I = \left] -\frac{1}{2}\ ;\ +\infty \right[$ par $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x - 2}{2x + 1}$.

1) Démontrer que $f(x) = x - 3 + \dfrac{1}{2x+1}$.

2) Déterminer $f'(x)$ et étudier son signe.

3) En déduire le tableau de variations de f sur I.

4) Donner l'équation de la tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point A d'abscisse 3.

5) Représenter graphiquement la fonction f dans un repère $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$.

On vérifiera les résultats à l'aide d'un ordinateur ou d'une calculatrice.

Exercice 99

Exercice 100