Suites numériques

Terminale S
Lycée Charles PONCET

Septembre 2012

Table des matières

Le symbole ✏ indique les exemples à traiter, des démonstrations à trouver.
Le symbole ☛ indique des points importants, des pièges possibles, des notations particulières, etc.

1 Raisonnement par récurrence

1.1 Principe du raisonnement par récurrence

Propriété

Soit $P(n)$ *une propriété qui dépend d'un entier naturel* n.
Pour démontrer que $P(n)$ *est vraie, quel que soit l'entier naturel* n *(ou quel que soit l'entier naturel* n *non nul), on démontre que :*

- $P(0)$ *(ou* $P(1)$*) est vraie ;*
- *la propriété* $P(n)$ *est récurrente, c'est-à-dire, si* $P(n)$ *est vraie pour un entier naturel* n *quelconque (ou pour un entier naturel* n *non nul quelconque), alors* $P(n+1)$ *est vraie (*propriété d'hérédité*).*

Si les deux conditions précédentes sont vérifiées, alors la propriété $P(n)$ *est vraie quel que soit l'entier naturel* n *(ou quel que soit l'entier naturel* n *non nul).*

1.2 Exercices

A. On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n+1}$ avec $u_0 = \dfrac{1}{2}$.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1, u_2, u_3...
2. Conjecturer une formule donnant l'expression de u_n en fonction de l'entier naturel n.
3. Démontrer, par récurrence, cette formule.

B. 1. Démontrer que, quel que soit $q \neq 1$, $1+q = \dfrac{1-q^2}{1-q}$ et $1+q+q^2 = \dfrac{1-q^3}{1-q}$.

2. Démontrer que, quels que soient $q \neq 1$ et l'entier naturel n non nul :

$$1+q+q^2+q^3+\cdots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

3. Retrouver cette formule en calculant $S_n - qS_n$, où $S_n = 1+q+q^2+q^3+\cdots+q^n$.

C. Démontrer, par récurrence, que si $S_n = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ alors :

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

D. On désigne par a un nombre réel strictement positif.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $(1+a)^n \geqslant 1+na$.
2. En déduire que , si q est un nombre réel strictement supérieur à 1, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
3. En déduire que , si q est un nombre réel tel que $0<q<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

E. Calculer $P(n) = n^2+n+11$ pour $n \in \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ \ldots\}$.
Que remarque-t-on ? Cette propriété est-elle vraie quel que soit l'entier naturel n ?

F. Démontrer par récurrence, que, pour tout entier naturel n, le nombre $3n^2+3n$ est divisible par 6.

2 Propriétés globales des suites numériques

2.1 Suites majorées, suites minorées, suites bornées

Définition 2.1.1

- *Une suite* (u_n) *de nombres réels est* majorée *s'il existe une nombre réel* M *(appelé* majorant*) tel que, pour tout entier* n, $u_n \leqslant M$.
- *Une suite* (u_n) *de nombres réels est* minorée *s'il existe une nombre réel* m *(appelé* minorant*) tel que, pour tout entier* n, $u_n \geqslant m$.
- *Une suite* (u_n) *de nombres réels est* bornée *si elle est à la fois majorée et minorée.*

✏ Démontrer que la suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{3n+4}{2n+1}$ est bornée.

Pour cela, on déterminera deux nombre réels A et B, tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = A + \dfrac{B}{2n+1}$.

2.2 Sens de variation d'une suite numérique

Définition 2.2.1 (sens de variation d'une suite numérique réelle)

1. *Une suite numérique* (u_n) *est* croissante *si, pour tout entier* n, $u_{n+1} \geqslant u_n$ *;*
2. *Une suite numérique* (u_n) *est* strictement croissante *si, pour tout entier* n, $u_{n+1} > u_n$ *;*
3. *Une suite numérique* (u_n) *est* décroissante *si, pour tout entier* n, $u_{n+1} \leqslant u_n$ *;*
4. *Une suite numérique* (u_n) *est* strictement décroissante *si, pour tout entier* n, $u_{n+1} < u_n$ *;*
5. *Une suite numérique* (u_n) *est* constante *ou* stationnaire *si, pour tout entier* n, $u_{n+1} = u_n$ *;*
6. *Une suite numérique est* monotone *si elle est soit croissante, soit décroissante, soit constante ;*
7. *Une suite numérique est* strictement monotone *si elle est soit strictement croissante, soit strictement décroissante.*

☛ Pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n) on peut calculer $u_{n+1} - u_n$ et étudier le signe de cette différence.

✏ Déterminer le sens de variation d'une suite arithmétique de raison r.

☛ Une suite numérique réelle ne peut être (strictement) monotone qu'à partir d'un certain rang.

Théorème 2.2.1 (sens de variation de la suite géométrique de terme général q^n)
Si q *est un nombre réel strictement positif, la suite géométrique* (q^n) *est strictement croissante si* $q > 1$, *constante si* $q = 1$ *et strictement décroissante si* $0 < q < 1$.

✏ $u_n = q^n$. Calculer $u_{n+1} - u_n$ et conclure.

3 Limite d'une suite numérique

3.1 Suites convergentes

Définition 3.1.1
Une suite (u_n) converge vers le nombre réel ℓ *si tout intervalle ouvert* I *contenant* ℓ*, contient tous les termes de* (u_n) *à partir d'un certain rang.*
Cela signifie donc que, quel que soit l'intervalle ouvert I *contenant* ℓ*, il existe une entier naturel* N *tel que, pour tout* $n \geqslant N$, $u_n \in I$.

Théorème 3.1.1 (unicité de la limite)
Si une suite converge, sa limite ℓ *est unique et on note* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

☛ Les suites de termes généraux $\dfrac{1}{n}$, $\dfrac{1}{n^2}$, $\dfrac{1}{n^p}$ (p étant un entier naturel non nul) et $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ convergent vers 0.

3.2 Suites divergentes

Définition 3.2.1
Une suite divergente *est une suite qui ne converge pas.*

Définition 3.2.2
Une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ si tout intervalle ouvert I du type $]A\,;+\infty[$ (avec A un nombre réel strictement positif) contient tous les termes de (u_n) à partir d'un certain rang.
Cela signifie donc que, quel que soit le nombre réel $A > 0$, il existe une entier naturel N tel que, pour tout $n \geqslant N$, $u_n > A$.

Définition 3.2.3
Une suite (u_n) a pour limite $-\infty$ si la suite de terme général $-u_n$ a pour limite $+\infty$.

☛ On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Les suites de termes généraux n, n^2, n^p (p étant un entier naturel non nul) et $\sqrt{n}$ ont pour limites $+\infty$.

Il existent deux sortes de suites divergentes : celles qui ont une limite infinie et celles qui n'ont pas de limite, comme par exemple la suite de terme général $(-1)^n$.

3.3 Théorèmes sur les limites

Les théorèmes sur les opérations sur les limites sont analogues à ceux sur les opérations sur les limites des fonctions numériques.
On considère deux suites numériques (u_n) et (v_n) et deux nombres réels α et β.

3.3.1 Somme

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	α	α	α	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	β	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$						

3.3.2 Produit par un nombre réel non nul

k désigne un nombre réel quelconque *non nul*.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	α	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (ku_n)$			

3.3.3 Produit

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	α	$\alpha \neq 0$	$\alpha \neq 0$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	β	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n)$							

3.3.4 Quotient

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	α	$\alpha \neq 0$	0	α	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\beta \neq 0$	0	0	$+\infty$ ou $-\infty$	β	β	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$							

Conclusion

Il y a quatre cas où on ne peut pas conclure : « $\infty - \infty$ », « $0 \times \infty$ », « $\dfrac{0}{0}$ » et « $\dfrac{\infty}{\infty}$ », ce sont des *formes indéterminées*.

3.3.5 Théorèmes de comparaison

Ce sont des théorèmes analogues à ceux pour les fonctions numériques et se démontrent de la même façon.

Théorème 3.3.1
On considère deux suites (u_n) et (v_n) telles qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$.

- *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.*
- *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.*

Théorème 3.3.2 (théorème des « gendarmes »)
On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) telles qu'à partir d'un certain rang, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ et un nombre réel ℓ.

- *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.*

✏ En utilisant le théorème des « gendarmes » déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin(n)}{n}$.

3.4 Cas des suites géométriques

Théorème 3.4.1
q est un nombre réel non nul.

- *Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.*

- *Si* $0 < q < 1$ *ou* $-1 < q < 0$*, c'est-à-dire* $0 < |q| < 1$*, alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

☛ Le théorème 3.4.1 a été démontré dans l'exercice D page 2 (pour $q > 1$ et pour $0 < q < 1$).

✏ Peut-on donner un sens à $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$?

4 Limite des suites monotones

4.1 Suites monotones non bornées

Théorème 4.1.1

- *Si une suite* (u_n) *est croissante et non majorée alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
- *Si une suite* (u_n) *est décroissante et non minorée alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

✏ Démontrer le théorème 4.1.1 en utilisant la définition d'une suite qui a pour limite $+\infty$ et en écrivant que (u_n) n'est pas majorée, c'est-à-dire que, pour tout réel M, donc, en particulier, pour tout réel $M > 0$, il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} > M$.
Si (u_n) est décroissante et non minorée, considérer la suite (v_n) de terme général $v_n = -u_n$.

4.2 Suites monotones convergentes

Théorème 4.2.1

- *Si une suite* (u_n) *est croissante et converge vers le nombre réel* ℓ *alors elle est majorée par* ℓ.
- *Si une suite* (u_n) *est décroissante et converge vers le nombre réel* ℓ *alors elle est minorée par* ℓ.

✏ Démontrer le théorème 4.2.1 en utilisant un raisonnement par l'absurde.

4.3 Le théorème de la convergence monotone

Théorème 4.3.1 (*théorème admis*)

- *Toute suite croissante et majorée converge.*
- *Toute suite décroissante et minorée converge.*

✏ Démontrer que la suite (u_n) dont les premiers termes sont $u_1 = 0{,}2$, $u_2 = 0{,}23$, $u_3 = 0{,}235$, $u_4 = 0{,}235\,7$, $u_5 = 0{,}235\,711$, … converge. (On cherchera également la définition du terme général de cette suite.)

☛ La limite de (u_n) est la constante de COPELAND-ERDŐS (Arthur Herbert COPELAND, mathématicien américain, 1898-1970 et Paul ERDŐS, mathématicien hongrois, 1913-1996).

Exercice d'application

On considère la suite u définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n}$.

1. Calculer u_1, u_2.
   Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n < 4$.
2. Déterminer le sens de variation de la suite u.
3. Justifier que la suite u converge et déterminer sa limite.