

Exercice 1 (11 points)

Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés d'un filtre numérique N et de comparer des effets de ce filtre avec ceux d'un filtre analogique A .

Partie I

On rappelle que tout signal discret causal est nul pour tout nombre entier strictement négatif.

Soient $x(n)$ et $y(n)$ les termes généraux respectifs de deux signaux discrets causaux représentant, respectivement, l'entrée et la sortie du filtre numérique N . Ce filtre est conçu de telle sorte que, pour tout nombre entier n positif ou nul, on a :

$$y(n) - y(n-2) = 0,04x(n-1).$$

1. On note Zx et Zy les transformées en Z respectives des signaux causaux x et y . Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de -1 et 1 , on a :

$$(Zy)(z) = \frac{0,04z}{(z-1)(z+1)}(Zx)(z).$$

2. On suppose que le signal d'entrée est l'échelon unité discret :

$$x(n) = e(n) \text{ avec } e(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ 1 & \text{si } n \geq 0 \end{cases}.$$

- a) Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de -1 et 1 , on a :

$$(Zy)(z) = \frac{0,04z^2}{(z-1)^2(z+1)}.$$

- b) Calculer les constantes réelles A , B et C telles que :

$$\frac{0,04z}{(z-1)^2(z+1)} = \frac{A}{(z-1)^2} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z+1}.$$

- c) En remarquant que :

$$\frac{(Zy)(z)}{z} = \frac{0,04z}{(z-1)^2(z+1)}$$

montrer que, pour tout nombre entier n positif ou nul, on a :

$$y(n) = 0,02n + 0,01(1 - (-1)^n).$$

- d) Déterminer $y(2k)$ puis $y(2k+1)$ pour tout nombre entier naturel k .
- e) En déduire que pour tout nombre entier naturel k , on a : $y(2k+1) = y(2k+2)$.
- f) Représenter graphiquement les termes du signal causal y lorsque le nombre entier n est compris entre -2 et 5 .

Partie II

On rappelle que la fonction échelon unité, notée U , est définie par :

$$\begin{cases} U(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ U(t) = 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases} .$$

Soit la fonction f définie pour tout nombre réel t par :

$$f(t) = \sin(20t)U(t) .$$

On note F la transformée de Laplace de la fonction f . Le signal de sortie du filtre analogique A est représenté par la fonction s dont la transformée de Laplace S est telle que :

$$S(p) = \frac{F(p)}{p} .$$

1. Justifier que, pour tout nombre réel t positif ou nul, on a :

$$s(t) = \int_0^t f(u) du .$$

2. En déduire que, pour tout nombre réel t positif ou nul, on a :

$$s(t) = \frac{1 - \cos(20t)}{20} .$$

3. Donner sans justification la valeur maximale et la valeur minimale de la fonction s .

4. Tracer, sur le graphique du document réponse, l'allure de la courbe représentative de la fonction s .
Il n'est pas demandé d'étudier la fonction s .

La figure du document réponse montre une simulation du résultat obtenu en sortie du filtre numérique soumis à une version échantillonnée de la fonction f , lorsque la période d'échantillonnage est 0,02.

Document à rendre avec la copie

