Objectif : Un exercice tombé au bac ... (Boum!)

EXERCICE - 1

A et C sont deux points distincts du plan ; on note Γ le cercle de diamètre [AC] et O le centre de Γ ; B est un point du cercle Γ distinct des points A et C.
Le point D est construit tel que le triangle BCD soit équilatéral direct ; on a donc $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right) = +\frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.
Le point G est le centre de gravité du triangle BCD.
Les droites (AB) et (CG) se coupent en un point M.

Partie A

1. Faire une figure et placer les points D, G et M.
2. Montrer que les points O, D et G appartiennent à la médiatrice du segment [BC] et que le point G est le milieu du segment [CM].
3. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe s de centre C transformant B en M.

Partie B

Dans cette question, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ choisi de telle sorte que les points A et C aient pour affixes respectives -1 et 1.
Soit E le point construit pour que le triangle ACE soit équilatéral direct ; on a donc $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}\right) = +\frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.

1. Calculer l'affixe du point E et construire le point E sur la figure.
2. Soit σ la similitude directe d'expression complexe $z' = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{4}$.
   Déterminer les éléments caractéristiques de σ et en déduire que σ est la similitude réciproque de s.
3. Montrer que l'image E$'$ du point E par σ a pour affixe $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et montrer que le point E$'$ appartient au cercle Γ.
4. On note $\mathcal{C}$ le lieu des points M lorsque le point B décrit le cercle Γ privé des points A et C.
   Montrer que le point E appartient à $\mathcal{C}$.
   Soit O$'$ l'image du point O par la similitude s. Démontrer que le point O$'$ est le centre de gravité du triangle ACE.
   En déduire une construction de $\mathcal{C}$.