1.

On souhaite démontrer le théorème suivant :

Théorème 1.1 : Les isométries du plan sont les transformations d'écriture complexe :
$z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\, z + b$ ou $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\, \overline{z} + b$, θ étant un réel et b un nombre complexe.

La démonstration !

Remarque préliminaire :

Soit un repère orthonormal (O,I,J) et M (x, y) un point du plan.
On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OI} &= (x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}).\overrightarrow{OI}\\ &= x(\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OI}) + y(\overrightarrow{OJ}.\overrightarrow{OI})\\ &= x\end{aligned}$$

Et de la même façon $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OJ} = y$.

On considère un repère orthonormal direct (O,I,J).
Soit f une isométrie du plan.

1. Soit $O' = f(O)$, $I' = f(I)$ et $J' = f(J)$.
f est une isométrie, elle conserve donc les distances et les produits scalaires.
Ainsi O'I'=OI=1 et O'J'=OJ=1
et $\overrightarrow{O'I'}.\overrightarrow{O'J'} = \overrightarrow{O'I'}.\overrightarrow{O'J'} = 0$

Le repère (O',I',J') est donc orthonormal.

2. Soit M un point du plan d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ et M'=f(M).

a. Il existe un couple de réel (x', y') tel que
$\overrightarrow{O'M'} = x'\overrightarrow{O'I'} + y'\overrightarrow{O'J'}$
Les isométries conservant les produits scalaires, on a :

$$\begin{aligned}x' &= \overrightarrow{O'M'}.\overrightarrow{O'I'}\\ &= \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OI}\\ &= x\end{aligned}$$

et de la même façon, $y' = y$.

Ainsi $\boxed{\overrightarrow{O'M'} = x\overrightarrow{O'I'} + y\overrightarrow{O'J'}.}$

b. $\overrightarrow{O'I'}$ est un vecteur unitaire, son affixe a donc pour module 1 et ainsi il existe un réel θ tel que $z_{\overrightarrow{O'I'}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$
$\overrightarrow{O'J'}$ est un vecteur unitaire et de plus les isométries conservent les angles géométriques donc :
$\left(\overrightarrow{O'I'}, \overrightarrow{O'J'}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $\left(\overrightarrow{O'I'}, \overrightarrow{O'J'}\right) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$
avec $k \in \mathbb{Z}$.
L'affixe du vecteur $\overrightarrow{O'J'}$ a donc pour module 1 et admet pour argument $\theta + \dfrac{\pi}{2}$ ou $\theta + \dfrac{\pi}{2}$.

Ainsi $z_{\overrightarrow{O'J'}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\frac{\pi}{2})} = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ ou $z_{\overrightarrow{O'J'}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\frac{\pi}{2})} = -\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

(i.) Premier cas $z_{\overrightarrow{O'J'}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\frac{\pi}{2})} = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$
$\overrightarrow{O'M'} = x\overrightarrow{O'I'} + y\overrightarrow{O'J'}$.
donc $\overrightarrow{O'M'}$ a pour affixe
$z' = x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + y\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(x + \mathrm{i}y) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z$
Si l'on prend b pour affixe de O', on obtient :
$z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z + b$

(ii.) Deuxième cas $z_{\overrightarrow{O'J'}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\frac{\pi}{2})} = -\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$
$\overrightarrow{O'M'} = x\overrightarrow{O'I'} + y\overrightarrow{O'J'}$.
donc $\overrightarrow{O'M'}$ a pour affixe
$z' = x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - y\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(x - \mathrm{i}y) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\overline{z}$
Si l'on prend b pour affixe de O', on obtient :
$z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\overline{z} + b$

c. On a donc montré que, **si** f est une isométrie, **alors** f admet pour écriture complexe $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\, z + b$ ou $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\, \overline{z} + b$.
Il reste à prouver la réciproque, c'est-à dire qu'une transformation ayant pour écriture complexe
$z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\, z + b$ ou $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\, \overline{z} + b$ est une isométrie.
On doit donc montrer que, dans chacun des deux cas, si l'on considère des points A (z_A), B (z_B) et A' $(z_{A'})$ et B' $(z_{B'})$ tels que A'=f(A) et B'=f(B), on a bien $|z_{B'} - z_{A'}| = |z_B - z_A|$ donc A'B'=AB. (A refaire, juste pour le plaisir.)

Corollaire 1.1 : Toute isométrie est la composée de translations, réflexions et rotations.

Démonstration

On vient de montrer que les isométries du plan sont les transformations d'écriture complexe :
$z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\, z + b$ ou $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\, \overline{z} + b$, θ étant un réel et b un nombre complexe .
Il ne reste plus qu'à appliquer le cours de la partie obligatoire!

2.

Théorème 2.1 :

- Toute similitude qui admet trois points fixes **non alignés** est l'identité.
- Toute similitude directe qui admet au moins deux points fixes est l'identité.
- Toute similitude indirecte qui admet au moins deux points fixes A et B est la réflexion d'axe (AB).

Démonstration :

1. *Toute similitude qui admet trois points fixes* ***non alignés*** *est l'identité.*

   Soit une similitude S.

   Soit trois points A, B et C non alignés tels que S(A)=A, S(B)=B et S(C)=C.

   Supposons qu'il existe un point M du plan tel que M'=S(M) soit différent de M.

   On a S(A)=A, S(B)=B, S(C)=C et S(M)=M'

   donc $\begin{cases} AM = AM' \\ BM = BM' \\ CM = CM' \end{cases}$

   Ce qui veut dire que A, B et C appartiennent à la médiatrice de [MM'], ce qui est en contradiction avec l'hypothèse A, B et C non alignés.

   Ainsi pour tout point M du plan S(M)=M et S est l'identité.

2. *Toute similitude directe qui admet au moins deux points fixes est l'identité.*

   Soit une similitude directe S admettant deux points fixes A et B.

   S a pour écriture complexe $z' = az + b$.

   donc

   $\begin{cases} S(A) = A \\ S(B) = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_A = az_A + b \\ z_B = az_B + b \end{cases}$

   ce qui est équivalent à $a = 1$ et $b = 0$

   et S est l'identité.

3. *Toute similitude indirecte qui admet au moins deux points fixes A et B est la réflexion d'axe (AB).*

   Soit une similitude indirecte S admettant deux points fixes A et B.

   S est une isométrie.

   Soit C un point n'appartenant pas à la droite (AB).

   C ne peut être fixe (sinon S admettrait trois points fixes non alignés, se serait une identité donc pas une similitude indirecte).

   AC=AC' et BC=BC' donc C'=$s_{/(AB)}$(C).

   (On peut remarquer que S et $s_{/(AB)}$ coincident pour trois points non alignés.)

   Soit $f = S \circ s_{/(AB)}$

   On vérifie que f(A)=A, f(B)=B et f(C)=C.

   f admet trois points fixes non alignés.

   Ainsi f est l'identité

   et $S \circ s_{/(AB)} = id$

   d'où $(S \circ s_{/(AB)}) \circ s_{/(AB)} = s_{/(AB)}$

   et $S = s_{/(AB)}$