Révisions d'oral

1. Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \mathrm{d}t$.
   (a) Montrer la convergence de I_n.
   (b) Exprimer I_n en fonction de n.
   (c) Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Pour $r \geqslant 1$, calculer le moment d'ordre r de X.

2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \mathrm{d}t$.
   (a) Donner l'ensemble de définition D de f. Montrer que f est dérivable sur D et pour $x \in D$, donner $f'(x)$.
   (b) Étudier les variations de f et donner les limites éventuelles aux bornes du domaine de définition.
   (c) Soit g la fonction définie par $g(t) = \dfrac{e^{-t} - 1}{t}$ si $t \neq 0$ et $g(0) = -1$. Vérifier que g est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   En déduire que $\displaystyle\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} \mathrm{d}t \sim -\ln x$ quand $x \to 0$. En déduire un équivalent de f en 0.
   (d) En utilisant une intégration par parties, montrer que $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x} - \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} \,\mathrm{d}t$.
   Montrer que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} \,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t} \,\mathrm{d}t$. En déduire que $f(x) \sim \dfrac{e^{-x}}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.

3. Soit F la fonction définie par $F : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{t}{t^4 + t^2 + 1} \,\mathrm{d}t$.
   (a) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$
   (b) Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et étudier ses variations.
   (c) En procédant au changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$, exprimer $F\left(\dfrac{1}{x}\right)$ à l'aide de F pour x non nul.
   (d) En déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x)$.

4. Soit f la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{t^2 x} \,\mathrm{d}t$
   (a) Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que : $\forall h \in [-1, 1], \quad f(x+h) - f(x) = \displaystyle\int_0^1 h\, t^2 e^{t^2 x} \,dt + \int_0^1 e^{t^2 x} \left(e^{t^2 h} - t^2 h - 1\right) \mathrm{d}t$
   (c) Montrer que : $\forall u \in [-1, 1], \quad 0 \leqslant e^u - 1 - u \leqslant e \times \dfrac{u^2}{2}$
   (d) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \displaystyle\int_0^1 t^2\, e^{t^2 x} \,dt$.

5. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, l'intégrale $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u^x} \,\mathrm{d}u$ est définie.
   (b) Exprimer $f(x+2)$ en fonction de $f(x)$.
   (c) Montrer que pour $x > 0$, $|f(x+2)| \leqslant 1$.
   (d) Donner les limites de f aux bornes de $\mathbb{R}^+$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A_n la matrice suivante

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \frac{n+2}{n} & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Montrer sans calculs que 1 et $1 + \frac{1}{n}$ sont valeurs propres de A_n.
   A_n est-elle diagonalisable ? inversible ?

   (b) Soit $B_n = A_1 A_2 \cdots A_n$.
   B_n est-elle diagonalisable ? inversible ? Si oui, calculer B^{-1}.

7. Soient M et D les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Montrer que les matrices M et D sont semblables.

   (b) Calculer les puissances $n^{\grave{e}mes}$ de la matrice M.

8. Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont munis de leur base canoniques usuelles.
Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ deux applications linéaires. On suppose que la matrice représentant l'endomorphisme $h = f \circ g$ est la matrice

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   (a) Montrer que $h \circ h = h$ et que $\mathrm{rg}\,(h) = 2$.

   (b) En déduire que $\mathrm{rg}\,(f) = \mathrm{rg}\,(g) = 2$.

   (c) Montrer que l'application $g \circ f$ est l'application identité de $\mathbb{R}^2$.

9. Soit u un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que : $u^3 = -u$. On note id l'application identique de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Montrer que : $Im\left(u^2 + \mathrm{id}\right) \subset Ker\ (u)$.

   (b) Montrer que : $\mathbb{R}^3 = Ker\ (u) \oplus Ker\left(u^2 + \mathrm{id}\right)$.

   (c) On admet que tout endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ admet au moins une valeur propre réelle.
   Quel est l'ensemble des valeurs propres de u ?

   (d) Montrer que $Ker\left(u^2 + \mathrm{id}\right) \neq \mathbb{R}^3$ et $Ker\left(u^2 + \mathrm{id}\right) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

   (e) Soit x un vecteur non nul de $Ker\left(u^2 + \mathrm{id}\right)$. Montrer que $\langle x, u\,(x)\rangle$ est une base de $Ker\left(u^2 + \mathrm{id}\right)$.

   (f) Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

10. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$. Un endomorphisme u sur E est dit *nilpotent* s'il existe un entier p tel que $u^p = u \circ u \circ \cdots \circ u = 0$. Soit u un tel endoporphisme.

   (a) Montrer que le rang de u est strictement inférieur à n.

   (b) On dit qu'un sous-espace vectoriel F est stable par u si $u\,(F) \subset F$. Montrer que la restriction de u à un tel sous-espace F, notée $u_{|F}$ est un endomorphisme de F dont le rang est strictement inférieur à la dimension de F dès que F n'est pas le sous-espace trivial $\{0_F\}$.

   (c) Soient maintenant $u_1,\ u_2,\ \cdots, u_n\ \ n$ endomorphismes nilpotents de E, commutant deux à deux, c'est à dire, tels que pour tous i et j, $u_i \circ u_j = u_j \circ u_i$. Montrer que $u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_n = 0$ en étudiant par récurrence le rang de $u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_k$.

11. Soit A la matrice définie par
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
 (a) Déterminer les éléments propres de cette matrice A.
 (b) Justifier l'existence d'une matrice diagonale Δ et d'une matrice inversible P telle que : $\Delta = P^{-1}A\,P$. Explicitez Δ et P

12. Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$; on pose $E_A = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \,/\, M\,A = A\}$.
 (a) Montrer que E_A est non vide.
 (b) Donner une condition suffisante sur A pour que E_A soit réduit à un singleton.
 (c) E_A est-il un espace vectoriel ?
 (d) Soit $F_A = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \,/\, (I+M)\,A = A\}$; montrer que F_A est un espace vectoriel.

13. Soit $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a+b & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
 (a) A est-elle diagonalisable ?
 (b) Déterminer les éléments propres de A
 (on pourra utiliser l'endomorphisme f canoniquement associé à A).

14. (a) Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que A ou B est inversible et soit λ un réel. On se propose de démontrer que sauf pour un nombre fini de λ, la matrice $A - \lambda B$ est inversible. On note I la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
  i. Étudier le cas où $B = I$.
  ii. Étudier le cas où B est inversible.
  iii. Étudier le cas où A est inversible.
 (b) Que se passe-t-il si A et B ne sont pas inversibles ?

15. Un jeu de roulette est constitué d'une cuvette divisée en N cases numérotées de 1 à N. Toute bille lancée dans cette cuvette tournante est susceptible d'atteindre chaque case avec la même probabilité. On lance la bille plusieurs fois en notant les résultats successifs $R_1,\ R_2,\ \cdots,\ R_n,\ \cdots$. Le jeu s'achève dès que $R_n \geqslant R_{n-1}$. On désigne par X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de lancers effectués avant que le jeu ne s'arrête et l'on note $p_n = P\,(X > n)$.
 (a) Calculer p_n en fonction de n.
 (b) Montrer que X_n admet une espérance. Calculer cette espérance.

16. Une urne contient $2n$ boules : deux boules n°1, deux boules n°2, $\cdots$, deux boules n°n.
 On tire simultanément deux boules.
 - Si les deux boules sont identiques : on les retire de l'urne.
 - Si les deux boules diffèrent, on les remet dans l'urne.

 Y_1 est le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première paire de boules identiques.
 Y_{i+1} représente le nombre de tirages nécessaires après l'obtention de la i$^{\text{ème}}$ paire de boules identiques pour retirer la i+1$^{\text{ème}}$; et X_n le nombre de tirages nécessaires pour vider l'urne.
 (a) Déterminer la loi de Y_1 et son espérance, puis la loi de Y_i pour $2 \leqslant i \leqslant n$.
 (b) Montrer que l'espérance de X_n vaut $E\,(X_n) = n^2$.

17. On dispose de $p+1$ urnes numérotées de 0 à p, pour tout entier $i \in [\![0, p]\!]$, l'urne i contient i boules blanches et $p - i$ boules noires. On choisit une urne au hasard, dans laquelle on effectue une série de n tirages avec remise.
 Y est la variable aléatoire égale au numéro de l'urne choisie ; N_p celle égale au nombre de boules blanches obtenues.
 On pose $I_{k,q} = \displaystyle\int_0^1 x^k\,(1-x)^q\,\mathrm{d}x$.

(a) Donner sans calcul le signe de $\operatorname{cov}(Y, N_p)$.

(b) Donner la loi de N_p sous forme d'une somme.

(c) Montrer que $\lim\limits_{p\to+\infty} P(N_p = k) = \dbinom{n}{k} I_{k,n-k}$.

(d) Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, trouver une relation de récurrence entre $I_{k,n-k}$ et $I_{k+1,n-k-1}$; en déduire la valeur de $I_{k,n-k}$ en fonction de n et de k.

(e) Déduire de ce qui précède $\lim\limits_{p\to+\infty} P(N_p = k)$.

18. On considère une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes, ayant même probabilité de succès $p \in]\,0\,,\,1\,[$. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves nécessaires à l'obtention d'un premier succès.

(a) Quelle est la loi de X ? donner son espérance et sa variance.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère n variables aléatoires indépendantes ayant même loi que X, que l'on note $X_1, \ldots, X_n$. Déterminer la loi de $M_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

(c) Montrer que M_n admet une espérance et étudier la suite $E\Big((M_n)\Big)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

19. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & y^2 - x^4 + 5\,x^2 - 4 \end{array}$

(a) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Expliciter les dérivées partielles de f.

(c) À toute fonction définie sur $\mathbb{R}^2$, nous associons sa ligne de niveau 0 : $\mathscr{C}_f = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ f\,(x,y) = 0\big\}$
Montrer que $\mathscr{C}_f$ est la réunion de deux courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ associées respectivement à des fonctions g et h définies et continues sur un ensemble à déterminer.

(d) Soit (x_0, y_0) un point quelconque de $\mathscr{C}_f$
— Calculer le gradient de f en ce point.
— Montrer que ce gradient est orthogonal à la tangente à $\mathscr{C}_f$ en ce point.

20. (a) Montrer que : $\forall x > 0, \quad x + 1 \leqslant e^x \leqslant x\ e^x + 1$

(b) Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \ln\left(\dfrac{e^{u_n} - 1}{u_n}\right)$.
Montrer que u_n est définie pour tout entier n et que la suite (u_n) est strictement monotone.

(c) Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{u_{n+1}} = 2$

21. Soit λ un réel quelconque strictement compris entre 0 et 1

(a) Montrer qu'il existe un unique réel positif x_n tel que $\lambda\ e^{x_n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x_n^k}{k!}$
Indication : faire l'étude préliminaire pour $n = 1$.

(b) Montrer que la suite (x_n) est strictement croissante et non bornée.

22. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$

(a) Étudier les variations de f et représenter dans le même repère orthonormé son graphe et la droite d'équation $y = x$.

(b) Justifier que (u_n) est bien définie pour tout n.

(c) Dans le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, quelle est sa limite ?

(d) Étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas $u_0 > 1$ puis dans le cas $u_0 < 1$.

Révisions d'oral

1. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, mutuellement indépendantes, de même loi, définies sur un même espace probabilisé. On note F la fonction de répartition de cette loi. Pour tout x réel et pour tout entier naturel non nul n, on note $Z_{n,x}$ le nombre de variables aléatoires X_i ($i \in [\![1, n]\!]$) qui ont une valeur inférieure ou égale à x, et on pose $T_{n,x} = \dfrac{Z_{n,x}}{n}$.
   (a) Déterminer la loi de $Z_{n,x}$, son espérance et sa variance. Déterminer un majorant de $V(Z_{n,x})$ indépendant de x.
   (b) Montrer que $\forall \varepsilon > 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} P\Big(\big[\,|T_{n,x} - F(x)| \geqslant \varepsilon\big]\Big) = 0$

2. On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes, de même loi de Poisson de paramètre 1. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
   (a) Quelle est la loi de S_n ?
   (b) Déterminer $P\Big(\big[\,S_n \leqslant n\,\big]\Big)$.
   (c) En utilisant de théorème de la limite centrée (ou théorème central limite) montrer que :
   $$\lim_{n\to+\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$$

3. Soit $f(x) = \dfrac{2\,x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$
   (a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble J à déterminer. On notera g la bijection réciproque.
   (b) Montrer que g est dérivable sur J. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point A d'abscisse 0.

4. Soit $\mathcal{G}$ le graphe de la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $x \longmapsto \frac{1}{x}$
   (a) Étudier brièvement cette fonction et donner l'allure de son graphe
   (b) Soient A, B et C trois points de $\mathcal{G}$ non alignés. Donner une équation de la droite passant par A et perpendiculaire à (BC).
   (c) En déduire que l'orthocentre (point d'intersection des trois hauteurs) du triangle ABC est un point de $\mathcal{G}$.

5. Soit a un nombre complexe tel que $|a| < 1$ et z un complexe tel que $|\bar{a}z| \neq 1$.
   (a) Montrer que
   $$(|a-z| = |1-\bar{a}z|) \Longleftrightarrow |z| = 1 \quad \text{et} \quad (|a-z| < |1-\bar{a}z|) \Longleftrightarrow |z| < 1.$$
   (b) Montrer que toutes les racines du polynôme $P = X^{n+1} - aX^n + \bar{a}X - 1$ sont de module 1.

6. Soit f une fonction réelle continue sur $[0,1]$.
   (a) On suppose dans cette question seulement que $f\big([0,1]\big) \subset [0,1]$. Montrer qu'alors f admet un point fixe dans $[0,1]$, c'est à dire qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.
   (b) On suppose ici que $2\int_0^1 f(t)\ dt = 1$. Montrer qu'alors f admet un point fixe en considérant la dérivée de $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt - \frac{x^2}{2}$

7. (a) Soient ω et c deux réels quelconques.
   Déterminer l'ensemble $S_{\omega,c}$ des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y'' + \omega^2 y = c$.
   Cet ensemble de solutions forme-t-il un espace vectoriel ?

   (b) Déterminer l'ensemble S des fonctions f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = f^2(0)(1 - f(x))$$

   Cet ensemble S forme-t-il un espace vectoriel ?

   (c) Soient ω un réel quelconque.
   Déterminer l'ensemble T_ω des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + \omega^2 f(x) = \omega f(0)$$

   Cet ensemble T_ω est-il un espace vectoriel ?

8. Soit $\mathcal{C}$, la courbe paramétrée d'équation : $x(t) = \dfrac{t}{t^2 - 1}$, $y(t) = \dfrac{t^2}{t - 1}$.

   (a) Déterminer D, l'ensemble de définition de $\mathcal{C}$.

   (b) Étudier les variations de x et y sur D, préciser les limites aux bornes de D.

      i. Préciser les branches infinies lorsque $t \to -1$, $t \to -\infty$ et $t \to +\infty$.

      ii. Montrer que la courbe admet une asymptote oblique lorsque $t \to 1$, préciser la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

   (c) Montrer que la courbe admet un point double A, c'est à dire qu'il existe deux valeurs distinctes t_1 et t_2 du paramètre pour lesquelles les points $M(t_1)$ et $M(t_2)$ sont les mêmes. Calculer ces deux valeurs et préciser les tangentes aux points $M(t_1)$ et $M(t_2)$.

9. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad P(X = p, Y = q) = \lambda \frac{p + q}{p!q!2^{p+q}}$$

   (a) Déterminer λ.

   (b) Déterminer les lois marginales de X et Y. Sont-elles indépendantes ?

10. Soit P un polynôme appartenant à $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $f(P) = P + \dfrac{1 - X}{n} P'$.

   (a) Montrer que f est un endomorphisme de E.

   (b) Écrire la matrice M de f dans la base canonique de E, et montrer qu'elle est diagonalisable.

   (c) Donner une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.

11. On considère une suite $(X_n)_{n \geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une même loi de Bernoulli de paramètre p.

   Pour tout entier $n \in N^*$, on pose $Y_n = X_n + X_{n+1}$ et $M_n = \dfrac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}$.

   (a) Rappeler la loi faible des grands nombres.

   (b) Les variables Y_n sont-elles indépendantes ?

   (c) Calculer l'espérance et la variance de M_n.

   (d) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que $\forall \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|M_n - 2p| > \varepsilon) = 0$.

12. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{k}{x^2 y} & \text{si} \quad x > 1 \text{ et } \frac{1}{x} < y < x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   (a) Déterminer k de sorte que f soit une densité de probabilité .

   (b) Déterminer les densités marginales de X et Y.

(c) Déterminer les densités conditionnelles de X sachant $[Y = y]$ et de Y sachant $[X = x]$.

13. Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $[1, +\infty[$ telle que il existe $\alpha > 0$ vérifiant

$$\forall x \geqslant 1, \quad P(X \geqslant x) = x^{-a}$$

(a) Trouver une densité de la variable $Y = \ln(X)$, donner son espérance et sa variance.

(b) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi que X. On pose pour tout $n \geqslant 1$

$$U_n = \sqrt[n]{X_1 X_2 \dots X_n}$$

Déterminer pour tout $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\ln U_n - \frac{1}{a}\right| \geqslant \epsilon\right)$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|U_n - e^{\frac{1}{a}}\right| \geqslant \epsilon\right)$$

14. Pour tout entier naturel n, on définit E_n comme le $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par les fonctions $\phi_0,\ \phi_1,\ \cdots, \phi_n,\ \psi_1,\ \psi_2,\ \cdots, \psi_n$ où pour tout t dans $\mathbb{R}$ et $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$

$$\phi_k\,(t) = \cos\,(kt) \ \text{ et } \ \psi_k\,(t) = \sin\,(kt)$$

(a) Montrer que E_n est aussi le $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par les fonctions $\theta_{-n},\ \cdots,\ \theta_0,\ \cdots,\ \theta_n$ où pour tout t dans $\mathbb{R}$ et $k \in \{-n, \cdots, n\}$, $\theta_k\,(t) = e^{ikt}$

(b) Montrer que si $f \in E_n$, alors $f'' + n^2 f \in E_{n-1}$.

(c) Montrer par récurrence sur n que les $\phi_0,\ \phi_1,\ \cdots, \phi_n,\ \psi_1,\ \psi_2,\ \cdots, \psi_n$ constituent une famille libre et donner la dimension de E_n.

(d) Soit X une variable aléatoire à valeur dans $\{0, 1, \cdots, n\}$. On définit la fonction caractéristique de X par la fonction qui à t associe

$$\Phi_X\,(t) = \mathrm{E}\left(e^{itX}\right) = \mathrm{E}\,(\cos\,(tX)) + i\ \mathrm{E}\,(\sin\,(t\,X)) \ \text{ où E désigne l'espérance}$$

Montrer que $\int_0^{2\pi} \Phi_X\,(t)\ e^{-itk}\ \mathrm{d}t = 2\pi P\,(X = k)$ pour tout entier $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$. En déduire que Φ_X caractérise la loi de X.
Remarque : Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, alors $\int_0^{2\pi} f\,(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \mathrm{Re} f\,(t)\ \mathrm{d}t + i\ \int_0^{2\pi} \mathrm{Im}\ f(t)\ \mathrm{d}t$.

(e) Si X est une variable aléatoire Binomiale $\mathcal{B}\,(n, p)$, Calculer Φ_X.

15. Soit $I =]0, +\infty[$ et $(E)\ :\ x\,y' + 2\,y = \dfrac{x}{1 + x^2}$

(a) Résoudre l'équation homogène associée sur I.

(b) Résoudre (E) sur I.

(c) Existe-t-il des solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$?

16. Dans l'espace euclidien muni d'un repère orthonormé $\left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, considérons :

- le point A de coordonnées $(1, 2, 1)$
- le plan $\mathcal{P}$ d'équation $3x + 2y + 2z + 5 = 0$
- la droite $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = & 1 + 2\lambda \\ y = & 1 - 3\lambda \\ z = & 2 + \lambda \end{cases}$

(a) Calculez les coordonnées de B, projeté orthogonal de A sur le plan $\mathcal{P}$.

(b) Calculez les coordonnées de C, projeté orthogonal de A sur la droite $\mathcal{D}$.

(c) Calculez l'aire du triangle ABC.

17. Soit $\left(0,\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j}\right)$ un repère orthonormé du plan usuel ; on donne les points $A\,(1, 0)$ et $B\,(0, 1)$.

(a) Donner une équation de l'unique cercle $\mathscr{C}$ passant par les points A, B et l'origine O.

(b) Soit $M(a,b)$ un point du plan. Donner en fonction de a et b, les coordonnées du projeté orthogonal de M sur la droite (AB).

(c) Montrer que les trois projetés orthogonaux d'un point M sur les droites (OA), (OB) et (AB) sont alignés si, et seulement si, M appartient au cercle $\mathscr{C}$.

18. Soit E l'espace affine de la géométrie euclidienne muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Considérons les points A, B et C de l'espace E définis par : $\overrightarrow{OA} = \vec{\imath}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{\jmath}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{k}$.
Soit P le plan contenant les points A, B, C et M un point de coordonnées (x, y, z) dans le repère $\mathcal{R}$.

(a) Quelle est l'équation de P ? Quelle est la distance de M à P ?

(b) Déterminer les coordonnées d'un point I intérieur à (O,A,B,C) et équidistant des plans P_1 d'équation $x = 0$, P_2 d'équation $y = 0$, P_3 d'équation $z = 0$.

(c) Donnez les coordonnées des projetés orthogonaux de I sur chacun de ces plans.

19. Soit E l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ et φ l'application définie sur E par :
$\varphi : P \longmapsto \widehat{P}$ où $\forall x \in \mathbb{R},\ \widehat{P}(x) = P(0)\, x^3 + P'(x)$

(a) Montrer que φ est un endomorphisme de E.

(b) Déterminer la matrice A de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Cette matrice est-elle inversible ? Si oui, calculer A^{-1}.

(c) Calculer A^4.

20. Une puce se déplace par sauts de longueur 1 dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$
— Sa position initiale est O.
— Ses positions successives sont notées A_k.
— La direction du 1^{er} saut est donné par l'angle $\Phi_0 = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OA_1}\right)$.
— La direction du $(k+1)^{\text{ème}}$ saut est donnée par $\Phi_k = \left(\overrightarrow{OA_k}, \overrightarrow{A_k A_{k+1}}\right)$.
— La distance finale est $D_n = \left\|\overrightarrow{OA_n}\right\|$.
Les variables Φ_0, $\Phi_1, \cdots, \Phi_n, \cdots$ sont mutuellement indépendantes. Chacune d'elles suit la loi uniforme sur $[0, 2\pi]$.

(a) On note $C_n = \cos\Phi_n$. Donner l'espérance de C_n.

(b) Montrer que $D_{n+1}^2 = D_n^2 + 1 + 2\, D_n \cos\Phi_n$. En déduire $E\left(D_n^2\right)$.

(c) En déduire que $E(D_n) \leqslant \sqrt{n}$.

21. Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine de la géométrie euclidienne muni du repère orthonormé $\mathcal{R} = (0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
Considérons alors trois points A, B et C définis par leurs coordonnées respectives dans le repère $\mathcal{R}$: $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$ et $C(0; 0; c)$ où a, b, c sont des réels strictement positifs.
Soit H le projeté orthogonal de O sur le plan $P : (ABC)$.

(a) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

(b) Montrer que H correspond au point d'intersection des trois hauteurs du triangle.