Devoir surveillé 3

le samedi 17 décembre

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

PROBLEME

Dans ce problème, toutes les variables aléatoires seront définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et à valeurs dans l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$.
Pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ et tout réel t pour lequel cela a un sens, nous noterons $\varphi_X(t)$ l'espérance de la variable aléatoire t^X. Autrement dit, d'après le théorème de transfert,

$$\varphi_X(t) = E\left(t^X\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)\, t^k$$

La fonction φ_X est appelée fonction génératrice de la variable aléatoire X.

Nous adopterons la convention habituelle $0^0 = 1$, ce qui permet d'affirmer que $\varphi_X(0) = P(X = 0)$.

Partie I : généralités sur les fonctions génératrices

1. Soit n un entier naturel quelconque et X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$.
   (a) Montrer que φ_X est une fonction polynôme à coefficients réels. Quel est son degré maximal ? Quelle est la valeur de $\varphi_X(1)$?
   (b) Montrer que si φ_X est donnée, la loi de X est entièrement connue. Exprimer alors $P(X = j)$ en fonction de $\varphi_X^{(j)}(0)$.
   (c) Montrer que l'espérance de X vaut $E(X) = \varphi'_X(1)$.
   (d) Montrer que la variance de X vaut $V(X) = \varphi''_X(1) + \varphi'_X(1) - (\varphi'_X(1))^2$.
2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout entier n, on pose $a_n = P(X = n)$. Montrer que, pour tout réel $t \in [-1, 1]$, la série $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$ est absolument convergente. En déduire que φ_X est au moins définie sur le segment $[-1, 1]$ et donner la valeur de $\varphi_X(1)$.

Partie II : fonction génératrice de lois usuelles

1. Soit B une variable aléatoire distribuée selon la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Déterminer φ_B.
2. Soit B_n une variable aléatoire distribuée selon la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Déterminer la fonction génératrice de B_n et vérifier que $\varphi_{B_n}(t)$ peut s'écrire sous la forme $(\alpha + \beta t)^n$. En déduire l'espérance et la variance de B_n.
3. On suppose que G_1 et G_2 sont deux variables aléatoires indépendantes distribuées selon la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.
   (a) Déterminer la fonction génératrice de G_1 en écrivant, pour tout réel $t \in [-1, 1]$, $\varphi_{G_1}(t)$ sous forme d'une fraction.
   (b) Déterminer la loi de $H = G_1 + G_2$.
   conseil : vérifier au brouillon votre raisonnement avec le calcul de $P(H = 2)$
4. (a) Vérifier que, pour tout t convenable (c'est-à-dire pour lequel les quantités existent), $\varphi_{B_n}(t) = (\varphi_B(t))^n$ et que $\varphi_{G_1+G_2}(t) = \varphi_{G_1}(t)\varphi_{G_2}(t)$.
   (b) Plus généralement, soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que, pour t convenable, $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$.
   indication : on rappelle que si U et V sont indépendantes et admettent une espérance, alors $E(UV) = E(U)E(V)$

Partie III : un premier exemple d'utilisation

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N (avec $N \geq 2$). On y effectue des tirages successifs et avec remise d'une boule à la fois (en notant à chaque tirage le numéro obtenu). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on notera X_n la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des n premiers tirages. Par exemple, la liste $(1,1,1)$ comporte un numéro distinct et la liste $(1,2,1,4)$ comporte 3 numéros distincts.

1. Déterminer les lois de X_1 et de X_2.
2. Déterminer, en fonction de n et N, l'univers image de X_n.
3. Soit $n \geq 2$.
   (a) On note Ω l'ensemble des n-listes d'éléments de $[\![1, N]\!]$ modélisant les résultats possibles des n premiers tirages. Quel est le cardinal de Ω ?
   (b) Déterminer les probabilités des événements $[X_n = 1]$ et $[X_n = n]$.
   (c) Vérifier que $P(X_n = 2) = \dfrac{(N-1)(2^{n-1}-1)}{N^{n-1}}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que
$$\forall k \in [\![1, n+1]\!], \quad P(X_{n+1} = k) = \frac{k}{N} P(X_n = k) + \frac{N-k+1}{N} P(X_n = k-1) \qquad (\star)$$
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons φ_n la fonction génératrice de X_n :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} P(X_n = k) t^k$$
   (a) En utilisant la relation $(\star)$, montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_{n+1}(t) = \frac{1}{N}\left(t - t^2\right) \varphi_n'(t) + t\varphi_n(t)$$
   (b) En dérivant dans l'expression précédente, montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad E(X_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) E(X_n) + 1$$
   (c) Prouver enfin que l'espérance de la variable aléatoire X_n est donnée par
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad E(X_n) = N\left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right]$$
   (d) On suppose que $n = N$. Donner un équivalent de $E(X_N)$ quand $N \to +\infty$.

Partie IV : un second exemple d'utilisation

On étudie la colonisation d'un domaine par une population de plantes d'une espèce déterminée. Chaque plante de cette espèce a au cours de sa vie, X descendants où X est une variable aléatoire distribuée selon une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque plante se développe indépendamment des autres. La génération initiale $\mathcal{G}_0$ est constituée d'une seule plante, et la génération $\mathcal{G}_{n+1}$ est constituée des descendants directs des plantes de la génération $\mathcal{G}_n$.
On note Z_n la variable aléatoire égale à l'effectif de la génération $\mathcal{G}_n$. Z_0 est donc une variable certaine de valeur 1 et la loi de Z_1 est donc celle de X.
On note :
— $\varphi = \varphi_X$ la fonction génératrice de X.
— $\varphi_n = \varphi_{Z_n}$ la fonction génératrice de Z_n.

1. (a) Soit u un nombre choisi au hasard dans $[0,1[$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $S_k = \sum_{i=0}^{k} P(X = i)$ et on pose $S_{-1} = 0$. Justifier l'existence d'un unique $k \in \mathbb{N}$ tel que $S_{k-1} \leq u < S_k$ et vérifier que la probabilité d'avoir $u \in [S_{k-1}, S_k[$ vaut $P(X = k)$.

(b) On souhaite simuler une loi de Poisson de paramètre $\lambda = x$. Pour cela, on définit une fonction `SIMULPOISSON(x)` qui, pour un nombre u choisi au hasard, dans $[0,1[$ renvoie la valeur de k pour laquelle $S_{k-1} \leq u < S_k$. Compléter le programme suivant :

```
def SIMULPOISSON(x):
    u=random()
    v=exp(-x)    # contient successivement les P(X=i)
    S=v    # contient successivement les S_k
    k=0
    while . . . . . . :
        v=v* . . . . . .
        S=S+ . . . . . .
        . . . . . .
    return k
```

(c) Utiliser la fonction `SIMULPOISSON(x)` pour élaborer une fonction `DESCENDANCE(x,eff)` qui à partir de l'effectif `eff` d'une génération renvoie l'effectif de la génération suivante (obtenu en additionnant le nombre de descendants).

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = P(Z_n = 0)$. Montrer que la suite (u_n) est croissante et convergente.

3. (a) Supposons $[Z_1 = k]$ réalisé où k est un entier naturel donné non nul.
Notons $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \cdots, \mathcal{P}_k$ les k plantes de la génération $\mathcal{G}_1$ et pour tout $j \in [\![0,k]\!]$, la variable aléatoire $W_{j,n}$ égale au nombre de plantes de la génération $\mathcal{G}_n$ descendant de la plante $\mathcal{P}_j$. Remarquons alors que Z_n a la même loi que $\sum_{j=1}^{k} W_{j,n}$ et que $W_{1,n}, W_{2,n}, \cdots, W_{k,n}$ sont k variables aléatoires indépendantes et de même loi que Z_{n-1}.
Justifier alors $P_{[Z_1=k]}(Z_n = 0) = \left(P(Z_{n-1} = 0)\right)^k$ pour tout couple $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.

(b) En déduire que, pour tout $n \geq 2$, $u_n = \varphi(u_{n-1})$.

4. On admet que, pour tout $t \in [-1,1]$, $\varphi(t) = e^{\lambda(t-1)}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie donc

$$\forall n \geq 2, \quad u_n = \varphi(u_{n-1}) = \exp\left(\lambda(u_{n-1} - 1)\right)$$

(a) On suppose $\lambda \leq 1$.

i. Étudier sur $[0,1]$ les variations de la fonction $\delta : x \longmapsto \varphi(x) - x$ sur $[0,1]$ et en déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ii. Comment pourrait-on vérifier ce résultat en utilisant la fonction `DESCENDANCE(x,eff)` ?

(b) On suppose $\lambda > 1$.

i. Étudier sur $]1,+\infty[$ les variations de la fonction $\theta : u \longmapsto 1 - \dfrac{\ln(u)}{u}$.

ii. En déduire l'existence de $\beta \in \,]0,1[$ tel que $\delta'(\beta) = 0$. Déterminer les variations de la fonction δ sur $[0,1]$ puis justifier qu'il existe un unique réel $\alpha \in \,]0,1[$ tel que $\varphi(\alpha) = \alpha$.

iii. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq \alpha$ et préciser la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite croissante d'événements, c'est-à-dire telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, A_n \subset A_{n+1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par B_n les résultats qui réalisent A_{n+1} sans réaliser A_n et on note $B_n = A_{n+1} \setminus A_n$. On pose enfin $B_0 = A_1$.

(a) Justifier que $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$.

(b) En déduire que $P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$.

(c) Que représente l'événement $\bigcup_{n=1}^{+\infty} [Z_n = 0]$. Interprétez alors en quelques lignes la limite obtenue dans la question 4.

-- fin --