Devoir surveillé 1

le samedi 17 septembre

Problème 1

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad (x-1)y' + y = e^{-x}$$

et on note $f :]-\infty, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall\, x \in]-\infty, 1[\,, \quad f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

Partie I

1. Résoudre (E) sur $]-\infty, 1[$.
2. Montrer que f est l'unique solution de (E) satisfaisant la condition initiale $y(0) = 1$.
3. Déterminer les variations de f sur $]-\infty, 1[$ en précisant les limites en $-\infty$ et en 1.
4. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de f.

Partie II

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note d_n le coefficient devant x^n dans le DL à l'ordre n de f au voisinage de 0.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de d_n et l'exprimer en fonction de $f^{(n)}(0)$. Préciser la valeur de d_0, d_1 et d_2.
2. Démontrer que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ \forall\, x \in]-\infty, 1[\,, \quad (x-1)f^{(n+1)}(x) + (n+1)f^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x}$$
3. En déduire que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad d_{n+1} = d_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (\star)$$
4. A partir de $(\star)$, élaborer un programme en Python qui renvoie la valeur de d_{20}.
5. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d_n à l'aide d'une somme (que l'on ne cherchera pas à calculer).

Partie III

1. Démontrer par récurrence que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad e^{-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^k + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^{-t}\,\mathrm{d}t$$
2. En déduire que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ \forall\, x \geq 0\,, \quad \left| e^{-x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^k \right| \leq \frac{x^n}{n!}$$
3. On fixe $x \geq 0$. On pose $u_n = \dfrac{x^n}{n!}$. Justifier l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall\, n \geq n_0\,, \quad u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$$
En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
4. Déduire des questions précédentes la limite de la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie à la partie II.

Problème 2

Partie I

On considère l'application $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = xe^x$.

1. (a) Montrer que $g_{|[-1,+\infty[}$, la restriction de g à $[-1, +\infty[$, réalise une bijection de $[-1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera. Dresser le tableau de variations complet de son application réciproque que l'on notera h. Tracer les courbes de ces deux fonctions sur un même dessin.

   (b) Sur quel intervalle la fonction h est-elle dérivable ? Exprimer $h'(x)$ en fonction de x et de $h(x)$ mais sans exponentielle.

2. Dans cette question, on se propose d'obtenir une valeur numérique approchée de $\alpha = h\left(\frac{1}{2}\right)$.

   (a) Justifier que $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$.

   (b) On introduit la fonction $\varphi : x \longmapsto \frac{1}{2}e^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\varphi(\alpha) = \alpha$ et que

$$\forall\, x \in [0, +\infty[\,, \quad |\varphi'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

   (c) On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \varphi(u_n)$$

   Montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

   En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

   (d) Déterminer une valeur de n pour laquelle u_n est une valeur approchée à 10^{-2} près de α.

Partie II

Soit λ un réel strictement positif.

On étudie ici la famille de fonctions $f_\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_\lambda(x) = e^{-x} + \lambda x^2$. On note $\mathcal{C}_\lambda$ la courbe représentative de f_λ dans un repère orthonormé.

1. (a) Dresser le tableau de variations de f_λ. On notera m_λ le point où f_λ admet un minimum et on exprimera m_λ en fonction de h et de λ. Vérifier que $m_\lambda > 0$.

   (b) Vérifier que $f_\lambda(m_\lambda) = \lambda m_\lambda(m_\lambda + 2)$.

   (c) Donner l'allure de $\mathcal{C}_\lambda$.

   (d) Élaborer un programme en Python qui permette de tracer les 10 courbes $\mathcal{C}_\lambda$ pour $\lambda \in [\![1, 10]\!]$.

2. Dans cette question, on étudie la fonction $m : \lambda \longmapsto m_\lambda$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (a) Exprimer $m(1) = m_1$ en fonction de α (on pourra utiliser l'expression de m_λ trouvée à la question 1.(a)).

   (b) Étudier la monotonie de m ainsi que ses limites quand $\lambda \to +\infty$ et $\lambda \to 0^+$.

   (c) En observant la relation $2\lambda m_\lambda = e^{-m_\lambda}$, déterminer un équivalent simple de m_λ quand $\lambda \to +\infty$.

   (d) En observant la relation $m_\lambda + \ln(m_\lambda) = -\ln(2\lambda)$, déterminer un équivalent simple de m_λ quand $\lambda \to 0^+$.

3. Dans cette question, on étudie la fonction $\theta :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $\theta(\lambda) = f_\lambda(m_\lambda) = \lambda m_\lambda(m_\lambda + 2)$.

   (a) Montrer que θ est une fonction croissante.
   indication : prendre $\lambda_1 \leq \lambda_2$ et remarquer que $f_{\lambda_2}(m_{\lambda_2}) - f_{\lambda_1}(m_{\lambda_1}) = \big(f_{\lambda_2}(m_{\lambda_2}) - f_{\lambda_1}(m_{\lambda_2})\big) + \big(f_{\lambda_1}(m_{\lambda_2}) - f_{\lambda_1}(m_{\lambda_1})\big)$.

   (b) Déterminer les limites de θ en $+\infty$ et en 0^+.

   On prolonge θ par continuité en 0 en posant $\theta(0)$ égal à la limite trouvée en 0^+.

   (c) La fonction θ est-elle dérivable en 0 ? Présente-elle une tangente en 0 ?

   (d) Calculer $\theta(1)$. Montrer que θ est dérivable en 1 et que $\theta'(1) = \alpha^2$.

   (e) Représenter graphiquement la fonction θ dans un repère orthonormé d'unité égale à 4cm. On exploitera les informations obtenues au (c) et au (d). Donnée : $\alpha \approx 0.35$.