2 BCPST 1 & 2 Samedi 13 février 2016

MATHÉMATIQUES
Devoir surveillé n°5
Durée : 3 heures 30

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Notations - Généralités

- Pour chaque réel a, $\mathcal{E}_a$ désigne l'espace vectoriel des fonctions réelles f définies sur $\mathbb{R}$ et continues sur $[0,+\infty[$ telles que :
$$\forall x > a,\ \lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-xt} f(t) = 0$$
- On désigne par Transformation de Laplace, l'application qui, à toute fonction f continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ et vérifiant en outre des conditions restrictives convenables, fait correspondre la fonction de variable réelle définie par l'intégrale :
$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t$$
$\mathcal{L}(f)$ est appelée transformée de Laplace de f.
- La linéarité de l'intégrale induit la « linéarité » de la transformation de Laplace. Ainsi, pour toutes fonctions f et g admettant une transformée de Laplace définie au point x et pour tous réels λ et μ, on a :
$$\mathcal{L}(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda\,\mathcal{L}(f)(x) + \mu\,\mathcal{L}(g)(x).$$
- **On admettra la propriété suivante** :
Deux fonctions f et g continues sur $\mathbb{R}$ dont les transformées de Laplace coïncident sur un intervalle du type $]a,+\infty[$ coïncident sur $[0,+\infty[$.

Partie I

1. Soit a un réel quelconque, f une fonction de $\mathcal{E}_a$ et x un réel strictement supérieur à a.
   (a) Montrer que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\frac{-(x-a)t}{2}}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente.
   (b) En déduire que $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente.
2. Premier exemple:
Pour tout réel α, on considère la fonction h_α définie sur $[0,+\infty[$ par $h_\alpha(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}$.
Déterminer le domaine de définition et l'expression de $\mathcal{L}(h_\alpha)$.
3. Deuxième exemple :
On note E la fonction, qui à tout réel positif x associe sa partie entière, à savoir le plus grand entier inférieur ou égal à x.
   - Montrer que pour tout entier naturel k : $\forall x > 0,\ \displaystyle\int_k^{k+1} E(t)\,\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t = \frac{1-e^{-x}}{x} \times k\,(e^{-x})^k$
   - En déduire que $\mathcal{L}(E)$ est définie sur $]0,+\infty[$ et établir que : $\forall x > 0,\ \mathcal{L}(E)(x) = \dfrac{1}{x\,(\mathrm{e}^x - 1)}$

4. Troisième exemple :
Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $[0,+\infty[$ par $f_n(t) = t^n$.
On note $I_n = \mathcal{L}(f_n)$.

   (a) Préciser pour tout entier naturel n, le domaine de définition I_n *(En d'autres termes, pour quelles valeurs de x, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-tx} dt$ est-elle convergente ?).*

   (b) Pour $n \geq 1$ et $x > 0$, donner une relation de récurrence liant $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x)$.

   (c) En déduire une expression de $I_n(x)$ en fonction de x et n.

Partie II

On note $\mathcal{F}_a$ l'ensemble formé des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ dont la dérivée f' est élément de $\mathcal{E}_a$.

1. Soit a un réel quelconque.

   (a) Soit x un réel quelconque strictement supérieur à a et f une fonction quelconque de $\mathcal{F}_a$.
   - Justifier l'existence d'un réel A positif tel que : $\forall t > A,\ -1 \leq \mathrm{e}^{-\left(\frac{a+x}{2}\right)t} f'(t) \leq 1$.
   - En déduire $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-xt} f(t) = 0$.*(On pourra utiliser le théorème des accroissements finis).*

   (b) Que peut-on en déduire pour les ensembles $\mathcal{F}_a$ et $\mathcal{E}_a$?

2. Soit f une fonction de $\mathcal{F}_a$ et x un réel strictement supérieur à a.
Démontrer que : $\mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$.

3. Transformée de Laplace des fonctions sin et cos

   (a) Justifier l'appartenance de la fonction cos à $\mathcal{E}_0$.

   (b) Montrer que : $\forall x > 0,\ \mathcal{L}(\cos)(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Expliciter $\mathcal{L}(\sin)$.
   On pourra éventuellement utiliser le résultat obtenu dans la question 2 de la partie II.

4. Résolution d'un système différentiel.
On souhaite résoudre sur $\mathbb{R}$ le système différentiel :

$$\begin{cases} f' = -6f+9g \\ g' = -4f+7g \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} f(0) = 2 \\ g(0) = 1 \end{cases} \qquad (S).$$

Nous admettrons qu'un tel système admet exactement une seule solution maximale, définie sur $\mathbb{R}$.

   (a) Soit a un réel et (f,g) un couple de fonctions éléments de $\mathcal{F}_a$ dont on suppose qu'il est solution sur $\mathbb{R}$ du système différentiel (S).
   - Montrer que : $\forall x \in]a,+\infty[,\ \mathcal{L}(f)(x) = \dfrac{2x-5}{x^2-x-6}$ et $\mathcal{L}(g)(x) = \dfrac{x-2}{x^2-x-6}$.
   - Déterminer des réels $x_0, x_1, \alpha, \beta, \gamma$ et δ tels que :

$$\forall x \in]a,+\infty[,\ \mathcal{L}(f)(x) = \frac{\alpha}{x-x_0} + \frac{\beta}{x-x_1} \quad \textit{et} \quad \mathcal{L}(g)(x) = \frac{\gamma}{x-x_0} + \frac{\delta}{x-x_1}$$

   - En déduire les valeurs possibles de a et les expressions de f et g sur $[0,+\infty[$. *On pourra utiliser les résultats de la question 2 de la partie I et la propriété admise dans le préambule.*

   (b) Conclure.

Partie III

Dans cette question, nous supposons que f est une fonction continue sur $[0,+\infty[$ telle que :

- $\forall x>0,\ \lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-xt} f(t)=0$
- l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ convergente.

Nous **<u>nous proposons de prouver</u>** : $\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow 0\\ x>0}} \mathcal{L}(f)(x)=\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$

Nous poserons :

$$\forall u\geq 0,\ F(u)=\int_u^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$$

1. Montrer que $-F$ est une primitive de f sur $[0,+\infty[$.
2. Montrer que :

$$\forall x>0,\ \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t-x\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} F(t)\,\mathrm{d}t$$

3. Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^+} \left|x\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} F(t)\,\mathrm{d}t\right|=0.$
4. En déduire la limite de $\mathcal{L}(f)(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

Partie IV

L'objectif, dans cette partie, est de calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.

1. Prouver la convergence de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$.
2. En déduire la convergence de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$
3. Justifier les convergence des intégrales généralisées $\int_0^{1} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ et $\int_0^{1} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$
4. Justifier l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$$

5. Soient g et G les fonctions définies par : $g(x,t)=\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{e}^{-tx}$ et $G(x)=\int_0^{+\infty} g(x,t)\,\mathrm{d}t$.
   On note $\frac{\partial g}{\partial x}$ la dérivée partielle de g par rapport à la première variable.
   (a) Montrer que la fonction G est définie sur $[0,+\infty[$.
   (b) Préciser sa limite au voisinage de $+\infty$.
   (c) Nous vous demandons dans un premier temps d'admettre que la fonction G est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et vérifie :

$$\forall x>0,\ G'(x)=\int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}t$$

   La preuve de ce résultat est l'objet d'une question subsidiaire en partie V
   Expliciter alors $G'(x)$ pour x strictement positif.
   (d) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.
   On pourra utiliser les résultats des questions 3b de la partie II, et 4 de la partie III.

QUESTION SUBSIDIAIRE

Partie V

Nous nous proposons ici de démontrer le résultat admis dans la question 5c de la partie IV.

1. Soit α un réel quelconque strictement positif.
   Nous supposerons que x et x_0 sont deux réels quelconques de l'intervalle $[\alpha, +\infty[$ tels que $x \neq x_0$.

   (a) Soit t un réel quelconque positif
   - Prouver à l'aide d'une intégration par partie :

   $$g(x,t) = g(x_0,t) + (x - x_0)\,\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,t) + \int_{x_0}^{x} (x-u)\,\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(u,t)\,\mathrm{d}u$$

   - Calculer $(x-u)\,\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(u,t)$, puis montrer que pour tout u compris entre x et x_0 :

   $$\left|(x-u) \times \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(u,t)\right| \leq |x - x_0|\; t\,e^{-t\alpha}$$

   - En déduire

   $$\left|g(x,t) - g(x_0,t) - \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,t) \times (x - x_0)\right| \leq (x - x_0)^2\; t\,e^{-t\alpha}$$

   (b) En utilisant l'inégalité précédente, prouver que :

   $$\left|\frac{G(x) - G(x_0)}{x - x_0} - \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,t)\,dt\right| \leq \frac{1}{\alpha^2} \times |x - x_0|$$

2. Conclure.