Corrigé du devoir surveillé n^o 3

partie I

1. • $G(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$; on note S_i l'événement « La greffe n° i a pris »
$[G = k] = \overline{S}_1 \cap \ldots \cap \overline{S}_{k-1} \cap S_k$ donc par la formule des probabilités composées :
$$P(G = k) = P\left(\overline{S}_1\right) \times \ldots \times P_{\overline{S}_1 \cap \ldots \cap \overline{S}_{k-2}}\left(\overline{S}_{k-1}\right) \times P_{\overline{S}_1 \cap \ldots \cap \overline{S}_{k-1}}\left(S_k\right)$$
$$= \underbrace{q \times \cdots \times q}_{k-1 \text{ termes}} \times p = q^{k-1}\, p$$
G suit une loi géométrique de paramètre p à support dans $\mathbb{N}^*$, donc $E(G) = \dfrac{1}{p}$ et $V(G) = \dfrac{q}{p^2}$.
•

```python
from random import random
#*****************************
def GREFFE_UN_ROSIER(p):
    Resultat = random()<=p
    return Resultat
#*****************************
def NBRE_GREFFES_UN_ROSIER(p):
    RESULTAT_GREFFE = GREFFE_UN_ROSIER(p)
    G = 1
    while RESULTAT_GREFFE == False:
        RESULTAT_GREFFE = GREFFE_UN_ROSIER(p)
        G += 1
    return G
```

2. (a) Chaque variable X_k suit une loi géométrique de paramètre p, donc a même espérance et variance que G.

(b) X est le nombre total de greffes nécessaires donc $X = X_1 + \cdots X_R = \displaystyle\sum_{k=1}^{R} X_k$

(c) $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{R} E\left(X_k\right) = \frac{R}{p}$ et comme les variables sont mutuellement indépendantes, $V(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{R} V\left(X_k\right) = \frac{R\,q}{p^2}$

(d)

```python
def NBRE_GREFFES_R_ROSIERS(R,p):
    L = zeros(R)
    X = sum(L)
    for k in range(R):
        L[k] = NBRE_GREFFES_UN_ROSIER(p)
        X = sum(L)
    return L,X
```

(e)

```python
p = 0.4;R = 7;
Somme = 0
Somme_Carres = 0
N=10000
for k in range(N):
    [L,X] = NBRE_GREFFES_R_ROSIERS(R,p)
    Somme += L
    Somme_Carres += sum(L**2)
Moyenne = Somme/N
Variance =Somme_Carres/N-(Moyenne**2)/R;
print("Moyenne de l'échantillon : ",Moyenne)
print("Variance de l'échantillon : ",Variance)
```

(f) Les valeurs calculées à la question 2c donnent $E(X) = \frac{7}{0{,}4} = 17,5$ et $V(X) = \frac{7\times 0{,}6}{0{,}16} = 26,25$; c'est donc en accord avec la simulation effectuée.

3. (a) Chaque variable X_k est supérieure ou égale à 1 donc $X(\Omega) = [\![R, +\infty[\![$.

(b) i. $P\left(X_1 = x_1 ; \ldots ; X_R = x_R\right) = P\left([X_1 = x_1] \cap \ldots \cap [X_R = x_R]\right) = \prod_{k=1}^{R} P\left(X_k = x_k\right) = q^{x_1 - 1}p \ldots q^{x_R - 1}p$

par indépendance mutuelle des événements $[X_k = x_k]$ pour $k \in [\![1, R]\!]$

$$\boxed{P\left(X_1 = x_1 ; \ldots ; X_R = x_R\right) = q^{n-R}p^R}$$

ii. Soient deux R-uplets distincts d'entiers $(x_1, \ldots, x_R)$ et $(y_1, \ldots, y_R)$ dont la somme vaut n ; les événements $[X_1 = x_1] \cap \ldots \cap [X_R = x_R]$ et $[X_1 = y_1] \cap \ldots \cap [X_R = y_R]$ sont deux à deux incompatibles, donc :

$$P(X = n) = P\left(\bigcup_{x_1 + \cdots + x_R = n} \big([X_1 = x_1] \cap \ldots \cap [X_R = x_R]\big)\right) = \sum_{x_1 + \cdots + x_R = n} P\big([X_1 = x_1] \cap \ldots \cap [X_R = x_R]\big)$$

Comme ces événements sont en nombre égal à $\alpha(R, n)$ et tous équiprobables, on a :

$$\boxed{P(X = n) = \alpha(R, n)\, q^{n-R}p^R}$$

4. (a) $\alpha(1, n) = 0$ si $n = 0$ et 1 sinon, car pour qu'une somme de 1 nombre vaille n, ce nombre doit être égal à n.
$\alpha(2, n) = n - 1$ pour $n \geqslant 2$ et 0 sinon, (le choix d'une valeur pour x_1, comprise entre 1 et $n - 1$ détermine celui de x_2).

(b) Considérons 3 entiers naturels non nuls x_1, x_2, x_3 de somme égale à n, la somme $x_1 + x_2$ est un entier k compris entre 2 et $n - 1$ et bien sur $x_3 = n - k$; réciproquement, n étant fixé, la donnée d'un entier $k \in [\![2, n-1]\!]$ assure l'existence de 3 entiers naturels non nuls de somme n dont la somme des deux premiers vaut k.

Ainsi pour $n \geqslant 3$, $\alpha(3, n) = \sum_{k=2}^{n-1} \alpha(2, k) = \sum_{k=2}^{n-1} (k - 1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \binom{n-1}{2}$

(c)

```python
def alpha(R,N):
    if R == 1:
        return 1
    else:
        T = 0
        for k in range(1,N):
            T += alpha(R-1,k)
        return T
```

5. (a) • Un partage de S est contitué d'un ensemble de R segments dont les extrémités sont les points choisis sur les graduations ; la somme des longueurs de ces segments est donc égale à n et la longueur de chacun est un entier non nul. Les longueurs ainsi définies constituent donc un R-uplet solution de (E).
Plus précisément, si $(x_1, \ldots, x_{R-1})$ sont les abscisses des points définissant le partage, alors $x_1, \ldots, x_{R-1}$ sont des entiers tels que $1 \leqslant x_1 < x_2 \cdots < x_{R-1} \leqslant R - 1$
Donc $(x_1, \ldots, x_{R-1}) \longmapsto (x_1, x_2 - x_1, \ldots, x_R - x_{R-1}, n - x_R)$
• Réciproquement, si $\left(\ell_1, \ldots, \ell_R\right)$ est un R-uplet solution de E, alors les points d'abscisses ℓ_1, $\ell_1 + \ell_2, \ldots, \ell_1 + \cdots + \ell_{R-1}, n$ découpent le segment $[0, n]$ en R sous-segments non réduits à un point et de longueurs entières.

(b) En choisissant $R - 1$ points sur les graduations entre 1 et $n - 1$, on définit un découpage de $[0, n]$ en R sous-segments dont les longueurs sont des entiers non nuls.

(c) On a donc $\alpha(R, n) = \binom{R-1}{n-1}$ et la loi de X est donnée par :

$$\boxed{\forall n \in [\![R, +\infty[\![, P(X = n) = \binom{n-1}{R-1} q^{n-R}p^R}$$

Partie II

1. (a) Soit $k \in [\![1, R]\!]$, $[X_k > n]$ est l'événement « Les n premières greffes du k^{e} rosier ont échoué » et sa probabilité vaut q^n. Ainsi, $P\left(X_k \leqslant n\right) = 1 - q^n$. D'autre part $[Y \leqslant n] = \bigcap_{k=1}^{R} [X_k \leqslant n]$ et les événements $[X_k \leqslant n]$ sont mutuellement indépendants, donc $P\left(Y \leqslant n\right) = \prod_{k=1}^{R} P\left(X_k \leqslant n\right) = \left(1 - q^n\right)^R$

   (b) $\forall n \geqslant 2,\ [Y \leqslant n-1] \subset [Y \leqslant n]$ donc $[Y = n] = [Y \leqslant n] \setminus [Y \leqslant n-1]$ et
   $P(Y = n) = P(Y \leqslant n) - P(Y \leqslant n-1) = (1 - q^n)^R - \left(1 - q^{n-1}\right)^R$

2. (a) $[Z > n-1] = [Z = n] \cup [Z > n]$ et c'est une réunion disjointe, donc $P(Z > n-1) = P(Z = n) + P(Z > n)$ c'est à dire $u_n = v_{n-1} - v_n$.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} n\, u_n = \sum_{n=1}^{N} n\, u_n = \sum_{n=1}^{N} n\left(v_{n-1} - v_n\right) = \sum_{n=1}^{N} n\, v_{n-1} - \sum_{n=1}^{N} n\, v_n = \sum_{n=0}^{N-1} (n+1)\, v_n - \sum_{n=1}^{N} n\, v_n$

   Donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} n\, u_n = \sum_{n=0}^{N-1} n\, v_n + \sum_{n=0}^{N-1} v_n - \sum_{n=1}^{N} n\, v_n = \sum_{n=0}^{N-1} v_n - N\, v_N$

   $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} n\, u_n \leqslant \sum_{n=0}^{N-1} v_n$ et $\sum n\, u_n$ est une série à termes positifs, donc si $\sum v_n$ converge, on peut appliquer le théorème de comparaison des séries à termes positifs et conclure que $\sum n\, u_n$ converge.

   (c) $\displaystyle v_N = P(Z > N) = P\left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} [Z = n]\right) = \sum_{n=N+1}^{\infty} P(Z = n) = \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n = R_N$ (reste de rang N de la série $\sum u_n$).

   Pour tout entier $P > N$ on a $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{P} N\, u_n \leqslant \sum_{n=N+1}^{P} n\, u_n$

   Par passage à la limite lorsque $P \to +\infty$ on obtient $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty} N\, u_n \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} n\, u_n$ car la série $\sum n\, u_n$ converge.

   Or $\displaystyle v_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$ donc $\displaystyle N\, v_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} N\, u_n \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} n\, u_n$.

   $N\, v_N$ est positif et majoré par le reste de rang N de la série $\sum n\, u_n$, ce reste tend vers 0 comme tout reste d'une série convergente, donc $\lim\limits_{N \to +\infty} N\, v_N = 0$.

   (d) Z possède une espérance si et seulement si la série $\sum n\, P(Z = n)$, c'est à dire la série $\sum n\, u_n$, est absolument convergente.
   On a montré question 2b que si la série $\sum v_n$ converge, alors $\sum n\, u_n$ aussi.
   Réciproquement, on a vu question 2c que si la série $\sum n\, u_n$ converge, alors $N\, v_N$ tend vers 0 lorsque $N \to +\infty$, donc par passage à la limite dans l'égalité $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} n\, u_n = \sum_{n=0}^{N-1} v_n - N\, v_N$ on déduit la convergence de la série $\sum v_n$ ainsi que l'égalité des sommes des deux séries. En conclusion :

   $$\boxed{E(Z) \text{ existe} \iff \sum v_n \text{ converge et dans ce cas } E(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n}$$

3. (a) $v_n = 1 - \left(1 - q^n\right)^R$, $\lim\limits_{\to\infty} q^n = 0$ car $q \in]0, 1[$, donc $\left(1 - q^n\right)^R \underset{n\to\infty}{=} 1 - R\, q^n + o\left(q^n\right)$
   donc

   $$\boxed{v_n \underset{n\to\infty}{\sim} R\, q^n}$$

   (b) $P(Y = n) = v_{n-1} - v_n$ donc on peut utiliser ce qui précède, et $E(Y)$ existe si et seulement si $\sum v_n$ converge ; et dans ce cas $\displaystyle E(Y) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n$.

$v_n \underset{n\to\infty}{\sim} R\,q^n$ donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ v_n \leqslant 2\,R\,q^n$.

$\sum v_n$ est une série à termes positifs, majorée à partir du rang n_0 par une série convergente $(2\,R\,q^n)$, donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum v_n$ est une série convergente.

$$\boxed{E(Y) \text{ existe et vaut } E(Y) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n}$$

(c) Pour $R = 2$, $v_n = 1 - (1-q^n)^2$, donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} v_n = \sum_{n=0}^{N} \big(1 - (1 + q^{2n} - 2\,q^n)\big) = 2\sum_{n=0}^{N} q^n - \sum_{n=0}^{N} q^{2n}$,

donc $\displaystyle E(Y) = \lim_{N\to+\infty} 2\sum_{n=0}^{N} q^n - \sum_{n=0}^{N} q^{2n} = \frac{2}{1-q} - \frac{1}{1-q^2} = \frac{1+2\,q}{1-q^2}$

4. (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall x \geqslant 0$, $f'(x) = (\ln q)\,R\,q^x\,(1-q^x)^{R-1}$; $\ln q < 0$ donc f' est négative sur $\mathbb{R}^+$ et f est décroissante.

(b) $f(x) - R\,q^x = 1 - (1-q^x)^R - R\,q^x$.

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} q^x = 0$ donc $(1-q^x)^R = 1 - R\,q^x + \binom{R}{2} q^{2x} + o(q^{2x})$ et $f(x) - R\,q^x = -\binom{R}{2} q^{2x} + o(q^{2x})$.

$$\boxed{f(x) - R\,q^x = \underset{x\to+\infty}{\sim} -\binom{R}{2} q^{2x}}$$

(c) $-\binom{R}{2} q^{2x} < 0$ donc il existe un réel A appartenant à $\mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \geqslant A$, $f(x) - R\,q^x < 0$.

(d) D'après la majoration précédente, pour $x > A$, $0 \leqslant \displaystyle\int_A^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_A^x R\,q^t\,\mathrm{d}t$

$\displaystyle\int_A^x R\,q^t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{R\,q^t}{\ln q}\right]_A^x$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_A^x R\,q^t\,\mathrm{d}t = \frac{R\,q^A}{\ln q}$.

$x \longmapsto \displaystyle\int_A^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une fonction croissante sur $[A, +\infty[$ car f est positive, et majorée par $\dfrac{R\,q^A}{\ln q}$.

En tant que fonction croissante majorée, elle admet une limite finie lorsque $x \to +\infty$.

Par conséquent $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t + \int_A^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque $x \to +\infty$.

(e) $\displaystyle f(x) = 1^R - (1-q^x)^R = \big(1 - (1-q^x)\big)\sum_{k=0}^{R-1}(1-q^x)^k \times 1^{R-1-k} = \sum_{k=0}^{R-1} q^x\,(1-q^x)^k$

(f) $\displaystyle F(x) = \int_0^x \sum_{k=0}^{R-1} q^t\,(1-q^t)^k \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{R-1}\int_0^x q^t\,(1-q^t)^k \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{R-1}\left[\frac{(1-q^t)^{k+1}}{(k+1)\,\ln q}\right]_0^x = \frac{1}{\ln q}\sum_{k=0}^{R-1}\frac{(1-q^x)^{k+1}-1}{k+1}$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{1}{\ln q}\sum_{k=0}^{R-1}\frac{-1}{k+1} = L$

5. (a) On a vu question 4a que f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [n, n+1]$, $f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n)$. Comme $f(n) = v_n$, on en déduit l'encadrement demandé.

(b) Par intégration sur le segment $[n, n+1]$, $\displaystyle v_{n+1} = \int_n^{n+1} v_{n+1}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_n^{n+1} v_n\,\mathrm{d}t = v_n$.

Cet encadrement est valable pour tout $n \in [0, N]$ donc en sommant ces encadrements :

$\displaystyle\sum_{n=0}^{N} v_{n+1} \leqslant \int_0^{N+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=0}^{N} v_n$. En écrivant l'inégalité de gauche pour $N-1$ (donc pour $N \geqslant 1$) $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} v_{n+1} = \sum_{n=1}^{N} v_n \leqslant \int_0^N f(x)\,\mathrm{d}x$ c'est à dire $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} v_n \leqslant v_0 + \int_0^N f(x)\,\mathrm{d}x$, donc finalement :

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^{N+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=0}^{N} v_n \leqslant 1 + \int_0^N f(x)\,\mathrm{d}x}$$

(c) L'encadrement précédent peut s'écrire également $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ F(N+1) \leqslant \sum_{n=0}^{N} v_n \leqslant 1 + F(N)$ et par passage à la limite lorsque $N \to +\infty$, $L \leqslant E(Y) \leqslant 1 + L$

6. (a) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$ donc sur tout segment $[k, k+1]$ où $k \in \mathbb{N}^*$ donc $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}$ et pas sommation pour $k \in [\![1, R]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{R} \frac{1}{k+1} \leqslant \int_1^{R+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{R} \frac{1}{k}$
Comme précédemment on reprend l'inégalité de gauche pour $R-1$, ce qui donne après changement d'indice : $\displaystyle\sum_{k=2}^{R} \frac{1}{k} \leqslant \int_1^{R} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ puis $\displaystyle\sum_{k=1}^{R} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \int_1^{R} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ et finalement l'encadrement demandé.

(b) En utilisant les encadrements des deux questions précédentes, on obtient :
$$-\frac{\ln(R+1)}{\ln q} \leqslant -\frac{1}{\ln q}\sum_{k=1}^{R}\frac{1}{k} \leqslant E(Y) \leqslant 1 - \frac{1}{\ln q}\sum_{k=1}^{R}\frac{1}{k} \leqslant 1 - \frac{1}{\ln q}\left(1 + \int_1^R \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{(\ln q) - 1 - \ln R}{\ln q}$$
Lorsque $R \to +\infty$, $\ln(R+1) \sim \ln R$ et $(\ln q) - 1 = o(\ln R)$ donc $-\dfrac{\ln(R+1)}{\ln q} \sim -\dfrac{\ln R}{\ln q} \sim \dfrac{(\ln q) - 1 - \ln R}{\ln q}$

On en déduit donc $\boxed{E(Y) \underset{R \to +\infty}{\sim} -\dfrac{\ln R}{\ln q}}$

Partie III

1. Z_n représente le nombre de greffes qui ont pris à la $n+1^{\text{e}}$ tentative, c'est à dire la semaine $n+1$, et avaient échoué jusqu'à la n^{e}.
2. Y_1 suit une loi binomiale de paramètres R et p, donc $E(Y_1) = Rp$ et $V(Y_1) = Rp\,(1-p)$.
3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les événements $[Y_n = m]$ pour $0 \leqslant m \leqslant R$ forment un système complet, donc par la formule des probabilités totales :
$$\forall \ell \in [\![0, R]\!],\ P\left(Y_{n+1} = \ell\right) = \sum_{m=0}^{R} P\left(Y_{n+1} = \ell \,/\, Y_n = m\right)\, P(Y_n = m)$$
• Pour $m > \ell$, $P\left(Y_{n+1} = \ell \,/\, Y_n = m\right) = 0$ car il ne peut pas y avoir davantage de greffes réussies après la n^{e} qu'après la suivante.
• Pour $m \leqslant \ell$, $P\left(Y_{n+1} = \ell \,/\, Y_n = m\right) = P\left(Z_n = \ell - m \,/\, Y_n = m\right)$ car $Z_n = Y_{n+1} - Y_n$.
Par conséquent la somme ci-dessus s'arrête à $m = \ell$ puisque les termes d'indices supérieurs sont nuls, et
$$\forall \ell \in [\![0, R]\!],\ P\left(Y_{n+1} = \ell\right) = \sum_{m=0}^{\ell} P\left(Z_n = \ell - m \,/\, Y_n = m\right)\, P(Y_n = m).$$
(b) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $m \in [\![0, R]\!]$; on suppose qu'il reste $R-m$ rosiers dont la greffe n'a pas pris à l'issue des n premières greffes, donc Z_n peut prendre toutes les valeurs entre 0 et $R-m$.
Les réussites des $R-m$ nouvelles tentatives sont mutuellement indépendantes donc la loi de Z_n sachant $[Y_n = m]$ est une loi binomiale de paramètres $R-m$ et p.
$$\boxed{\forall k \in [\![0, R-m]\!],\ P\left(Z_n = k \,/\, Y_n = m\right) = \binom{R-m}{k} p^k\, q^{R-m-k}}$$
4. (a) On connait la loi de Y_1, donc pour $n = 1$, la formule $(*)$ donne :
$$\forall \ell \in [\![0, R]\!],\ P\left(Y_2 = \ell\right) = \sum_{m=0}^{\ell} \binom{R-m}{\ell-m} p^{\ell-m}\, q^{R-\ell} \binom{R}{m} p^m\, q^{R-m}$$
(b) $\displaystyle\binom{R-m}{\ell-m}\binom{R}{m} = \frac{(R-m)!}{(\ell-m)!\,(R-\ell)!} \times \frac{R!}{m!\,(R-m)!} = \frac{R!}{m!\,(\ell-m)!\,(R-\ell)!}$
$\displaystyle\binom{R}{\ell}\binom{\ell}{m} = \frac{R!}{\ell!\,(R-\ell)!} \times \frac{\ell!}{m!\,(\ell-m)!} = \frac{R!}{m!\,(\ell-m)!\,(R-\ell)!}$ donc les deux quantités sont égales.

(c) En utilisant la formule précédente dans l'expression de la loi de Y_2, on obtient :

$$P\left(Y_2 = \ell\right) = \sum_{m=0}^{\ell} \binom{R}{\ell}\binom{\ell}{m} p^{\ell}\, q^{2\,R-\ell-m} = \binom{R}{\ell} p^{\ell}\, q^{2(R-\ell)} \sum_{m=0}^{\ell} \binom{\ell}{m} q^{\ell-m}$$

(d) On reconnait une formule du binôme : $\displaystyle\sum_{m=0}^{\ell} \binom{\ell}{m} q^{\ell-m} = (1+q)^{\ell}$,

donc $\forall \ell \in [\![0, R]\!],\ P\left(Y_2 = \ell\right) = \displaystyle\binom{R}{\ell} p^{\ell}\, q^{2(R-\ell)}\, (1+q)^{\ell} = \binom{R}{\ell} \big(p\,(1+q)\big)^{\ell} \left(q^2\right)^{R-\ell}$

On reconnait une loi binomiale de paramètres R et $p\,(1+q) = 1-q^2$.

5. $Y_1 \hookrightarrow \mathscr{B}(R, 1-q)$ (question 2) et $Y_2 \hookrightarrow \mathscr{B}(R, 1-q^2)$ (question 4d) donc l'initialisation est réalisée.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $Y_n \hookrightarrow \mathscr{B}(R, 1-q^n)$; la formule (*) donne :

$$\begin{aligned}
\forall \ell \in [\![0, R]\!],\ P\left(Y_{n+1} = \ell\right) &= \sum_{m=0}^{\ell} \binom{R-m}{\ell-m} p^{\ell-m}\, q^{R-\ell} \binom{R}{m} \left(1-q^n\right)^m \left(q^n\right)^{R-m} \\
&= \sum_{m=0}^{\ell} \binom{R}{\ell}\binom{\ell}{m} p^{\ell-m}\, q^{(n+1)R-n\,m-\ell} \left(1-q^n\right)^m \\
&= \binom{R}{\ell} q^{(n+1)\,(R-\ell)} \sum_{m=0}^{\ell} \binom{\ell}{m} p^{\ell-m}\, q^{n\,(m-\ell)} \left(1-q^n\right)^m \\
&= \binom{R}{\ell} q^{(n+1)\,(R-\ell)} \Big(p\,q^n + \big(1-q^n\big)\Big)^{\ell}
\end{aligned}$$

; or $p\,q^n + \big(1-q^n\big) = 1-q^{n+1}$ donc $Y_{n+1} \hookrightarrow \mathscr{B}(R, 1-q^{n+1})$; la récurrence est établie.

6. $P(Y_n = k) = \displaystyle\binom{R}{k} (1-q^n)^k\ (q^n)^{R-k}$; $0 < q < 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (1-q^n)^k = 1$
Si $k = R$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left(q^n\right)^{R-k} = q^0 = 1$ et si $0 \leqslant k < R$, alors $\left(q^n\right)^{R-k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(Y_n = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant R-1 \\ 1 & \text{si } k = R \end{cases}$

$\boxed{(Y_n) \text{ converge en loi vers une variable aléatoire constante égale à } R}$