2 BCPST 1 & 2 Samedi 7 novembre 2015

MATHÉMATIQUES
Devoir surveillé n°2
Durée : 3 heures 30

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

PROBLEME N°1

Dans tout ce problème, a désigne un nombre réel. On se propose d'étudier les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant une relation de récurrence du type :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\, u_{n+1} = au_n + P(n)$$

où P est un polynôme.
Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est noté indifféremment $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou u.

Partie A : Le cas où P est constant

Dans cette partie, on pose $E_a^{(0)} = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,/\, \exists\, b \in \mathbb{R}\,,\, \forall n \in \mathbb{N}\,,\, u_{n+1} = au_n + b\right\}$.

1. Soit $u \in E_a^{(0)}$. Il existe donc un réel b tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = au_n + b$. Démontrer l'unicité de b. On notera $b = b_u$ pour $u \in E_a^{(0)}$.

2. (a) Déterminer $E_1^{(0)}$.

(b) Déterminer $E_0^{(0)}$.

Dans le reste de cette partie, a est supposé différent de 1.

3. Démontrer que $E_a^{(0)}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

4. Soient $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\, x_n = 1 \quad \text{et} \quad y_n = a^n$$

Démontrer que (x, y) est une famille libre de $E_a^{(0)}$. On précisera les valeurs de b_x et b_y.

5. Soit $u \in E_a^{(0)}$.

(a) Démontrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ unique tel que : $\begin{cases} \lambda x_0 + \mu y_0 = u_0 \\ \lambda x_1 + \mu y_1 = u_1 \end{cases}$.

(b) Montrer que, pour λ et μ définis à la question précédente, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\, u_n = \lambda x_n + \mu y_n$$

(c) Que peut-on conclure ?

6. Calculer la dimension de $E_a^{(0)}$.

Partie B : Le cas où $a \neq 1$

Dans cette partie, on suppose que $a \neq 1$.
On fixe par ailleurs un entier naturel p, et on note $\mathbb{R}_p[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p.
Enfin, on pose : $E_a^{(p)} = \left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,/\, \exists\, P \in \mathbb{R}_p[X]\,,\, \forall n \in \mathbb{N}\,,\, u_{n+1} = au_n + P(n) \right\}$.

1. (a) Démontrer que $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_p[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{p+1} \\ P & \longmapsto & (P(0), P(1), \ldots, P(p)) \end{array}$ est une application linéaire bijective de $\mathbb{R}_p[X]$ sur $\mathbb{R}^{p+1}$.

(b) Soit $u \in E_a^{(p)}$. Il existe donc un polynôme $P \in \mathbb{R}_p[X]$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\, u_{n+1} = au_n + P(n)$$

Déduire de la question précédente l'unicité de P. On notera $P = P_u$ pour $u \in E_a^{(p)}$.

2. Démontrer que $E_a^{(p)}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

3. Prouver que l'application $\theta : \begin{array}{ccc} E_a^{(p)} & \longrightarrow & \mathbb{R}_p[X] \\ u & \longmapsto & P_u \end{array}$ est une application linéaire.

4. Déterminer le noyau de θ.

5. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $Q_k = (X+1)^k - aX^k$.

(a) Quel est le degré de Q_k ?

(b) Démontrer que la famille $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_p)$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$.

(c) Démontrer que, pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, Q_k appartient à $\mathrm{Im}(\theta)$.

(d) Conclure que l'application θ est surjective.

6. Déduire des questions précédentes que l'espace $E_a^{(p)}$ est de dimension finie et calculer $\dim\left(E_a^{(p)}\right)$.

7. Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, on pose $x^{(k)}$la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}\,,\, x_n^{(k)} = n^k$.
On rappelle que y est la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $y_n = a^n$.
Démontrer que la famille $\left(x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(p)}, y\right)$ est une base de $E_a^{(p)}$.

8. *Application :* Déterminer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\, u_{n+1} = 2u_n - 2n + 7 \end{cases}$$

Partie C : Le cas où $a = 1$

1. En adaptant les résultats obtenus à la question précédente, déterminer :

$$E_1^{(p)} = \left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,/\, \exists\, P \in \mathbb{R}_p[X]\,,\, \forall n \in \mathbb{N}\,,\, u_{n+1} = u_n + P(n) \right\}$$

2. *Application :* Déterminer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\, u_{n+1} = u_n - 6n + 1 \end{cases}$$