MATHÉMATIQUES
Devoir surveillé n°3
Durée : 2 heures 30 minutes

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

EXERCICE

N personnes $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_N$ se transmettent dans cet ordre une information détenue préalablement par A_1.

- L'information détenue par A_1 sera notée ≪ Information Initiale ≫.
- Chaque personne transmet fidèlement l'information reçue avec la probabilité $p \in]0,1[$ ou la transforme en son contraire avec la probabilité q $(q = 1 - p)$ de sorte que la n$^{\text{ème}}$ personne reçoit l'information initiale ou son contraire.

On désigne par I_n l'événement ≪ la n$^{\text{ème}}$ personne reçoit l'Information Initiale ≫ et l'on note :

$$p_n = P(I_n) \quad \text{et} \quad q_n = 1 - p_n.$$

1. Pour tout entier $n \in \{1,\ 2,\ \cdots,\ N-1\}$, exprimer p_{n+1} et q_{n+1} en fonction de p_n et q_n.
2. Pour tout entier n compris entre 1 et N, on pose $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$.
   - Déterminer la matrice A telle que :
   $$\forall n \in \{1,\ 2,\ \cdots,\ N\}, \quad X_{n+1} = A\ X_n$$
   - Que vaut X_1 ? En déduire X_N en fonction de $N,\ A$ et X_1.
3. Montrer que la matrice A est semblable à $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2p-1 \end{pmatrix}$ et déterminer P tel que $\Delta = P^{-1}AP$.
4. En déduire successivement A^{N-1}et X_N dont vous expliciterez les termes. Vérifier que vous obtenez
$$P(I_N) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^{N-1} \quad \text{et} \quad P\left(\overline{I_N}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^{N-1}$$
   Quelles sont les limites de $P(I_N)$ et $P\left(\overline{I_N}\right)$ lorsque N tend vers $+\infty$?

PROBLÈME

Préliminaires

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et A un événement de probabilité non nulle.
Nous rappelons que : si A un événement de probabilité non nulle, alors la ≪ probabilité sachant A de tout événement B ≫ est indifféremment notée $\mathrm{P}_A(B)$ ou bien $\mathrm{P}(B\ /\ A)$.

1. Soient A et B deux événements tels que : $\mathrm{P}(B \cap A) \neq 0$.
   Montrer que pour tout événement C de $\mathcal{A}$: $\mathrm{P}_A(C\ /\ B) = \mathrm{P}_{A\cap B}(C)$.
2. Soient A et B deux événements tels que : $A \subset B$ et $\mathrm{P}(A) \neq 0$.
   Montrer que $\mathrm{P}_A(C\ /\ B) = \mathrm{P}_A(C)$.

Première partie

Un sauteur en hauteur participe à un concours. La barre est successivement mise à des hauteurs numérotées $1, 2, \cdots, n, \cdots$ et l'on fait les hypothèses suivantes :

- Le sauteur est éliminé dès son premier échec.
- Si le sauteur franchit la hauteur $n-1$, la probabilité qu'il franchisse la hauteur n vaut $q_n = \frac{1}{n}$.
- La probabilité que le sauteur franchisse la hauteur 1 vaut $q_1 = 1$.

Nous noterons

- E_n : l'événement « Le sauteur franchit la hauteur n »
- X : la variable aléatoire égale au numéro du dernier essai réussi ou bien égale à $+\infty$ si le sauteur ne rate jamais.

1. Justifier pour tout entier au moins égal à 2, l'égalité : $E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n = E_n$

2. Préciser les valeurs de $\mathrm{P}(E_1)$, de $\mathrm{P}(E_2)$ et $\mathrm{P}(E_3)$

3. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $\mathrm{P}(X = n)$.

4. Montrer que X est une v.a presque sûrement à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, en d'autres termes que $\mathrm{P}(X = +\infty) = 0$.

5. Montrer que l'espérance de cette variable aléatoire X vaut : $\mathrm{E}(X) = \mathrm{e} - 1$.

6. Montrer que la variance de cette variable aléatoire X vaut : $\mathrm{V}(X) = 3\mathrm{e} - \mathrm{e}^2$.

Seconde partie

Intéressons-nous à une compétition de tir un peu particulière.
Dans cette partie entrent en lice une **<u>suite illimitée</u>** de tireurs $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Le match se déroule selon les règles suivantes :

- $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots \mathrm{A}_n,\ \cdots$ tirent alternativement sur une cible jusqu'à ce que l'un d'eux la touche. Celui-ci est alors déclaré vainqueur de ce match.
- A_1 tire en premier, A_2 tire en second, A_3 tire en troisième et ainsi de suite....
- Si aucun tireur n'a touché la cible avant lui, le tireur A_n touche la cible avec la probabilité $p_n \in \,]0,1[$ et l'on note $q_n = 1 - p_n$.

On remarquera que chaque joueur ne peut tirer <u>au plus qu'une fois</u>.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous poserons

$$\varphi(n) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{i=1}^{n} q_i & \text{si} \quad n \geq 1 \\ 1 & \text{si} \quad n = 0 \end{cases}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous noterons G_n l'événement «A_n remporte le match ».

(a) Montrer que la probabilité de l'événement G_n vaut : $P(G_n) = \varphi(n-1) - \varphi(n)$ et justifier la convergence de la suite $\left(\varphi(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) On note a la limite de cette suite.
En déduire que la série de terme général $P(G_n)$ $(n \geq 1)$ est convergente et exprimer sa somme en fonction de a.

(c) Exprimer, en fonction de a, la probabilité de l'événement I : « le jeu dure indéfiniment ».

2. Nous nous proposons de déterminer a dans certaines situations.

(a) Montrer que si a est non nul alors q_n tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.
La réciproque est-elle vraie ?
Indication : on examinera le cas de la suite de terme général : $q_n = \frac{n}{n+1}$.

(b) Déterminer a si : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = p \in \,]0,1[$.

(c) Déterminer a si : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$

(a) i. Si la suite (p_n) ne tend pas vers 0 : quelle est la nature de la série de terme général p_n et celle de la série de terme général $\ln(1 - p_n)$?

ii. Si la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, montrer qu'il existe un entier n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0,\quad \frac{1}{2}p_n \leq -\ln(1-p_n) \leq \frac{3}{2}p_n$$

iii. En déduire que les séries de terme général $\ln(1 - p_n)$ et p_n sont toujours de même nature.

(b) Exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(1 - p_k)$ en fonction de $\ln \varphi(n)$.
Comparer les natures de la suite $(\ln(\varphi(n)))_{n\in\ \mathbb{N}^*}$ et de la série de terme général p_n.

(c) En déduire que la probabilité que le jeu dure indéfiniment est nulle si et seulement si la série de terme général p_n diverge.

- fin -