MATHÉMATIQUES
Devoir surveillé n°2

Durée : 3 heures

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice

Soit u un endomorphisme **non nul** de $\mathbb{R}^3$ tel que : $u^3 = -u$ où u^3 désigne l'endomorphisme $u \circ u \circ u$.
On note id l'application identique de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$ et $\overline{0}$ l'application nulle de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$.

1. **Nous nous proposons dans un premier temps de montrer que $\boldsymbol{u^2 + id \neq \overline{0}}$.**
Raisonnons par l'absurde et supposons $u^2 + id = \overline{0}$.
Soit x un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$.

(a) Montrer que la famille $\langle x, u(x) \rangle$ est libre.

(b) Justifier l'existence d'un vecteur y de $\mathbb{R}^3$ tel que : $\langle x, u(x), y \rangle$ soit base de $\mathbb{R}^3$.

(c) Montrer que la famille $\langle x, u(x), y, w(y) \rangle$ est libre.

(d) En quoi le dernier résultat obtenu est-il contradictoire ? Conclure

2. Justifier l'égalité : $u \circ \left(u^2 + id\right) = \overline{0}$ et expliquez pourquoi u et $u^2 + id$ ne peuvent être bijectifs.

3. Justifier que $\operatorname{Ker}\left(u^2 + id\right) \neq \{0\}$ et $\operatorname{Ker} u \neq \{0\}$

4. Soit a un vecteur non nul de $\operatorname{Ker} u$ et b un vecteur non nul de $\operatorname{Ker}\left(u^2 + id\right)$.
Montrer que $\langle a, b, u(b) \rangle$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice de u dans cette base ?

PROBLEME N°1

Dans tout ce problème, E désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles définies sur $\mathbb{N}$.

- On note D l'application qui à toute suite u associe la suite décalée $D(u) : n \longmapsto u_{n+1}$. Autrement dit, $D(u)$ est la suite définie par :

$$v = D(u) \overset{\text{définition}}{\Longleftrightarrow} \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1}$$

- La suite nulle sera notée $\overline{0}$
- On considère alors es trois suites A, B et C définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n = 3^n \quad \text{et} \quad B_n = 2^n \quad \text{et} \quad C_n = n2^n$$

- Enfin, on pose $\mathcal{B} = \langle A, B, C \rangle$ et $G = \text{Vect}\ \langle A, B, C \rangle$.

Partie I - Étude de l'application D

1. (a) Démontrer que D est un endomorphisme de E.

(b) Déterminer le noyau et l'image de D.

2. Nous allons démontrer dans cette question que la famille $\mathcal{B}$ est libre.
On considère pour cela trois réels a, b et c tels que $a\,A + b\,B + c\,C = \overline{0}$.
On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ a\,A_n + b\,B_n + c\,C_n = 0$.

- Choisir habilement des valeurs de n ou (l'un n'excluant pas l'autre) étudier le comportement de $a\,A_n + b\,B_n + c\,C_n$ lorsque n tend vers $+\infty$, puis résoudre le système de trois équations aux trois inconnues a, b et c obtenu.
- Conclure.

3. Déterminer une base, ainsi que la dimension, de l'espace G.

4. Démontrer que G est stable par D, c'est-à-dire que : $\forall f \in G\,,\ D(f) \in G$.

Dans toute la suite, nous noterons $\widehat{D}$ *l'endomorphisme de* G *induit par* D*, c'est-à-dire :*

$$\widehat{D} : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$$

et désignerons par I_3 *la matrice de l'identité de* G.

5. Déterminer la matrice M de $\widehat{D}$ dans la base $\mathcal{B}$.

6. Calculer M^3.

7. Montrer que M^3 s'exprime linéairement en fonction des matrices M^2, M et I_3. Plus précisément, déterminer les réels a, b, c tels que : $M^3 = a\,M^2 + b\,M + c\,\mathrm{I}_3$.

8. Démontrer que M est inversible, et expliciter son inverse M^{-1}.

9. Justifier que $\widehat{D}$ est un automorphisme de G.

10. Exprimer $\left(\widehat{D}\right)^{-1}$ en fonction de $\widehat{D}$.

Partie II - Résolution d'une équation différentielle d'ordre 3

Nous nous intéresserons ici à l'ensemble $\mathcal{H}$ des suites de E vérifiant la relation de récurrence triple suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 7\,u_{n+2} - 16\,u_{n+1} + 12\,u_n$$

1. Déterminer les suites géométriques de $\mathcal{H}$

Notons $T = D^3 - 7D^2 + 16D - 12\mathrm{Id}$, *où* Id *est l'identité de* E, $D^2 = D \circ D$ *et* $D^3 = D \circ D \circ D$.

2. Montrer que l'ensemble $\mathcal{H}$ n'est autre que le noyau de T.

3. Démontrer que $G \subset \mathrm{Ker}(T)$.

4. Nous allons maintenant établir que $\mathrm{Ker}(T) \subset G$. Soit $u \in \mathrm{Ker}(T)$.

(a) Démontrer que la suite $v = D^2\,(u) - 4\,D\,(u) + 4\,u$ est une suite géométrique dont vous préciserez la raison.q.

(b) Vous venez de montrer l'existence d'un réel λ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 4\,u_{n+1} + 4\,u_n = v_n = \lambda\,q^n$.

- En déduire que la suite $w = u - v$ vérifie la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} - 4\,w_{n+1} + 4\,w_n = 0.$$

- En vous référant à votre cours de première année, déterminer toutes les suites y de E vérifiant la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ y_{n+2} - 4\,y_{n+1} + 4\,y_n = 0$.

(c) En déduire l'expression générale de u et conclure..

5. **Application** :
Soit Z la suite de E définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ Z_{n+3} = 7\,Z_{n+2} - 16\,Z_{n+1} + 12\,Z_n$ où $Z_0 = 0$ et $Z_1 = Z_2 = 1$.
Déterminer pour entier naturel n l'expression de Z_n en fonction de n.