2 BCPST 1 & 2 — Mardi 2 septembre 2014

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
Durée : 2 heures 30

Exercice 1 :

a) Le nombre complexe $Z = \dfrac{1-i}{1+i}$ a pour partie réelle 1.

b) Le nombre complexe $Z = \dfrac{1-i}{1+i}$ est de module 1, un de ses arguments vaut $\dfrac{3\pi}{2}$ et $\dfrac{1}{Z} = \overline{Z}$.

c) Les solutions de l'équation $z^2 = 2i$ sont $z_1 = 1+i$ et $z_2 = \overline{z_1}$.

d) Soit $\alpha \in]0, \pi[$. Les solutions de l'équation $z^2 - 2\cos(\alpha)z + 1 = 0$ sont $\xi_1 = e^{i\alpha}$ et $\xi_2 = \overline{\xi_1}$.

Exercice 2 :

a) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\sin^2(\theta) = \dfrac{1-\cos(2\theta)}{2}$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2(\theta)\ \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}$.

b) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $1 - e^{i\theta} = 2i\sin(\theta)e^{i\frac{\theta}{2}}$.

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x)+\cos(x) = \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ et si on pose $f = \sin + \cos$, alors $f(\mathbb{R}) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

d) Pour tout $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = -\dfrac{1}{\tan(x)}$.

Exercice 3 :

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(t)}\ \mathrm{d}t = 1$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)}\ \mathrm{d}t = \sqrt{2} - 1$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)}\ \mathrm{d}t = 1 - \frac{\pi}{4}$.

b) A l'aide du changement de variable $x = 2u+1$ (soit $u = \dfrac{x-1}{2}$), on trouve $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{3u}{\sqrt{2u+1}}\ \mathrm{d}u = 1$.

c) A l'aide d'une IPP, on obtient $\displaystyle\int_0^1 \arctan(t)\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - \ln(2)$.

d) A l'aide du changement de variable $\sin(t) = u$, on trouve $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)\cos(t)}{1+\sin(t)}\ \mathrm{d}t = 1 - \ln(2)$.

Exercice 4 :

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$.

b) $\sin(\sqrt{x}) \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{x}$ et $\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{2}$.

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1$.

d) A l'aide d'un $DL_3(0)$, on obtient $\sin(2h) - 2\sin(h) \underset{h\to 0}{\sim} -h^3$.

Exercice 5 :
On pose $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1+x}$ et $g(x)=xe^{\frac{1}{x}}$.

a) On a les DL à l'ordre 3 en 0 suivants : $\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1+x+x^2+x^3+o(x^3)$ et $\sqrt{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)$.

b) Le DL à l'ordre 2 de f en 0 est donné par $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{3}{2}x^2+o(x^2)$ et la droite d'équation $y=x+1$ est la tangente à la courbe de f en 0.

c) On a $e^h \underset{h\to 0}{=} 1+h+\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}+o(h^3)$ et $g\left(\frac{1}{h}\right) \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{h}+1+\frac{h}{2}+o(h^2)$.

d) La droite d'équation $y=x+1$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_g$ de g en $+\infty$ et $\mathcal{C}_g$ est localement au-dessus de cette asymptote au voisinage de $+\infty$.

Exercice 6 :

a) Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'+y=0$ sont les fonctions f_C définies sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x\in\mathbb{R}, f_C(x)=e^{-x}+C$ où $C\in\mathbb{R}$.

b) Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $z''+z=0$ sont les fonctions $f_{A,B}$ définies sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x\in\mathbb{R}, f_{A,B}(x)=Ae^{x}+Be^{-x}$ où $(A,B)\in\mathbb{R}^2$.

c) La fonction $h: x\longmapsto x\cos(2x)$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $z''+z=-\sin(2x)$.

d) Les solutions sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle $2xy'+y=1$ sont les fonctions f_K définies par : $\forall x\in]0,+\infty[, f_K(x)=\frac{K}{\sqrt{x}}+1$ où $K\in\mathbb{R}$.

Exercice 7 :
On considère une urne contenant 2 jetons portant le numéro "1" et 6 jetons portant le numéro "2".

a) On effectue 3 tirages successifs et sans remise d'un jeton à la fois. La probabilité de l'événement A « obtenir un jeton "1", puis un jeton "2", puis un jeton "1" dans cet ordre » vaut $P(A)=\frac{1}{28}$.

b) On prélève simultanément 3 jetons dans l'urne de départ. La probabilité de l'événement B « le prélèvement contient deux jetons "1" et un jeton "2" » vaut $P(B)=\frac{1}{7}$.

c) On effectue 10 tirages successifs et avec remise d'un jeton à la fois. Si X est la v.a.r. donnant le nombre de jetons "1" obtenus, alors X suit une loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=\frac{1}{3}$. On a alors $E(X)=\frac{10}{3}$ et $V(X)=\frac{20}{9}$.

d) On effectue à nouveau 10 tirages successifs avec remise d'un jeton à la fois et les numéros notés dans leur ordre d'apparition forment un nombre à 10 chiffres. Il y a 20 nombres possibles, tous compris entre 1111111111 et 2222222222.

Exercice 8 :

a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par : $u_1=4 \quad$ et $\quad \forall n\in\mathbb{N}^*, \quad u_{n+1}=3u_n$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique et, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=4\times 3^n$.

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a $\sum\limits_{k=1}^{n} 3^k=\dfrac{3^n-1}{2}$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} k=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

c) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos(t)}\right)^n \mathrm{d}t$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0 et décroissante, donc converge.

d) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\dbinom{n}{k}=0$ et $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k 2^{n-k}=1$.

EXERCICE 9 :
On définit la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 3 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}\,, \quad u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$

a) Si jamais $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, ce ne peut être que vers 2.
b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 2$.
c) La suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et tend vers $+\infty$.
d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{n+1} - 2 \leq \dfrac{u_n - 2}{2}$ et $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2.

EXERCICE 10 :

a) Soient X et Y deux v.a.r. (sur un même espace probabilisé) indépendantes. Si on pose $Z = 2X+3Y+4$, alors $E(Z) = 2E(X) + 3E(Y) + 4$ et $V(Z) = 4V(X) + 9V(Y) + 16$.
b) On enlève 1 par 1 toutes les boules d'une urne contenant initialement 1 boule rouge et $n-1$ boules noires. Si X est la v.a.r. donnant le rang d'apparition de la boule rouge, alors X suit une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ et $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$.
c) On pioche 5 cartes dans un jeu de 32 cartes traditionnel. Si Y est la v.a.r. donnant le nombre d'as obtenus, alors Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \dfrac{1}{8}$.
d) Soient X et Y deux v.a.r. (sur un même espace probabilisé). La covariance et le coefficient de corrélation vérifient les identités suivantes :

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{V(X+Y) - V(X) - V(Y)}{2} \quad \text{et} \quad \rho(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

EXERCICE 11 :
On pose

$$\overrightarrow{u_1} = (1,1,2)\,, \quad \overrightarrow{u_2} = (1,-1,0) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{u_3} = (2,2,1)$$

et on note

$$F = \left\{\overrightarrow{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x+y-z = 0\right\} \quad \text{et} \quad G = \operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{u_3}\right)$$

a) F est un sev de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$ et $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ est une base de F.
b) G est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ incluse dans F.
c) La famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est de rang 3 et constitue une base de $\mathbb{R}^3$.
d) Une équation cartésienne de G est $x + y - 4z = 0$.

EXERCICE 12 :
On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.
On pose $\overrightarrow{u_1} = (1,2)$ et $\overrightarrow{u_2} = (1,-2)$.

a) f est donnée par $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x-y, -4x+2y) \end{array}$.
b) Le rang de f vaut 1 et le noyau de f est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$.
c) L'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{v} = (x,y)$ vérifiant $f\left(\overrightarrow{v}\right) = 4\overrightarrow{v}$ est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ engendrée par $\overrightarrow{u_2}$.
d) La famille $\mathcal{C} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et la matrice de f dans $\mathcal{C}$ est $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$.

Exercice 13 :
Soient $A,\ B,\ C$ les matrices suivantes

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad C=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 9\\ -1 & 2 & -1\\ 7 & 10 & 13 \end{pmatrix}$$

a) Le produit AB est égal à la matrice C.

b) La matrice A est inversible.

c) B est la seule matrice telle que $AB = C$.

d) La transposée de C vaut ${}^tC = B\,{}^tA$.

Exercice 14 :
Soit $(\mathcal{S})$ le système de trois équations à trois inconnues $x,\ y,\ z$ de paramètre m

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 1 \\ x + m\,y + z = m+2 \end{cases}$$

a) Pour $m \neq 2$, $(\mathcal{S})$ est un système de Cramer (i.e admet une unique solution).

b) Pour $m = 0$, $(\mathcal{S})$ admet pour seule solution : $x = 2,\ y = 1,\ z = 0$.

c) Pour $m = 2$, $(\mathcal{S})$ admet une infinité de solutions.

d) $x + y = 0$ est l'équation d'une droite de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique.

Exercice 15 :
Nous disposons de huit plaques dont trois portent le chiffre 1, deux portent le chiffre 3, les trois autres portant les chiffres 5, 7, 8. Ces plaques sont mises dans un sac. Nous tirons une à une et au hasard les plaques de cette urne en disposant les plaques de la gauche vers la droite. À titre d'exemple le tirage suivant

$$\boxed{8}\ \boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{7}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{5}$$

a permis de composer le nombre de huit chiffres suivant : 81371135 qui est alors considéré comme le résultat de cette expérience.

a) Lors ce cette expérience, nous pouvons former exactement 6720 nombres distincts de 8 chiffres.

b) La probabilité d'obtenir un résultat avec trois 1 consécutifs vaut $\dfrac{3}{28}$.

c) La probabilité pour que les trois « 1 » sortent avant les deux « 3 » vaut : $\dfrac{1}{168}$

d) La probabilité que le résultat se termine par 1 vaut $\dfrac{3}{8}$.

Exercice 16 :

a) $\ln x$ et $\ln(x+1)$ sont équivalents lorsque x tend vers $+\infty$.

b) $\exp(x)$ et $\exp(x+1)$ sont équivalentes lorsque x tend vers $+\infty$.

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^x = +\infty$.

d) la fonction $h : x \longmapsto (x+1)^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ h'(x) = x\,(x+1)^{x-1}$.