2 BCPST 1 & 2 Samedi 1er février 2014

MATHÉMATIQUES
Devoir surveillé n°5
Durée : 3 heures 30

L'usage d'une calculatrice n'est pas autorisé pour cette épreuve. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

PROBLÈME 1

1. Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\ e^{-|x|}\,\mathrm{d}x$ est une intégrale généralisée convergente et préciser sa valeur.

2. Préciser la nature de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\,e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

3. Soit α un réel quelconque **non nul.**

(a) Montrer l'existence d'une constante C_α telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \left|\dfrac{xe^x}{1+\alpha^2e^{2x}}\right| \leq C_\alpha\ |x|\ e^{-|x|}$.

(b) En déduire la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^x}{1+\alpha^2e^{2x}}\,\mathrm{d}x$.

4. Nous désignerons par f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^*,\ f(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^x}{1+\alpha^2e^{2x}}\,\mathrm{d}x$$

(a) Montrer, en procédant au changement de variable $u = -x$ que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^*,\ f(\alpha) = -\frac{1}{\alpha^2}\,f\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

En déduire la valeur de $f(1)$.

(b) Montrer, en procédant au changement de variable $t = x + \ln|\alpha|$ que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^*,\ f(\alpha) = -\frac{\pi \ln(|\alpha|)}{2\,|\alpha|}.$$

On rappelle que, selon les recommandations formulées dans les rapports de jury de concours, les changements de variable se pratiquent exclusivement sur des intégrales propres et non sur des intégrales généralisées.

PROBLÈME 2

Partie A

On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Nous désignerons par Id l'application identique de $\mathbb{R}^3$

1. Discuter selon les valeurs du réel λ le rang de $f - \lambda\mathrm{Id}$.

2. Vérifier qu'il existe trois réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que : $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ et Rang $(f - \lambda_k\,\mathrm{Id}) = 2$ pour $k = 1, 2, 3$.

3. Déterminer trois vecteurs u_1, u_2, u_3 dont la troisième coordonnée dans la base canonique vaut 1 et vérifiant : $f(u_k) = \lambda_k\, u_k$ pour $k = 1, 2, 3$.

4. Montrer que $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
Énoncer clairement le ou les théorèmes utilisés !

5. Préciser la matrice de passage P de la base canonique à cette nouvelle base.
Calculer son inverse P^{-1}.

6. Préciser la matrice B de f dans cette base et rappeler la relation entre les matrices M, B et P.

Partie B

On considère le système différentiel suivant :

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} 4u' &= u \\ 4v' &= 3u + 3v + w \\ 4w' &= v + 3w \end{cases} \quad \text{où} \quad u, v, w \text{ sont des fonctions dérivables sur } \mathbb{R} \text{ telles que : } u(0) = 1 \text{ et } v(0) = 2 \text{ et } w(0) = 3$$

Pour tout triplet (u, v, w) de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$:

- On note U, V et W les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} U(t) \\ V(t) \\ W(t) \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$$

- On pose :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} \text{ et } Y'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix} \text{ et } Z(t) = \begin{pmatrix} U(t) \\ V(t) \\ W(t) \end{pmatrix} \text{ et } Z'(t) = \begin{pmatrix} U'(t) \\ V'(t) \\ W'(t) \end{pmatrix}$$

1. Montrer que le système $(\mathcal{S})$ est équivalent au système : $\forall t \in \mathbb{R},\ Y'(t) = M\,Y(t)$.
2. En déduire que le système $(\mathcal{S})$ est équivalent au système : $\forall t \in \mathbb{R},\ Z'(t) = B\,Z(t)$.
3. Déterminer l'unique triplet (U, V, W) de solutions du système : $\forall t \in \mathbb{R},\ Z'(t) = B\,Z(t)$.

4. En déduire l'unique triplet (u, v, w) de solutions du système différentiel $(\mathcal{S})$.

PROBLÈME 3

Dans ce problème, nous utiliserons le produit scalaire $<,>$ de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\text{Si } \overrightarrow{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } \overrightarrow{v} = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3 \text{ alors } \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = x \times x' + y \times y' + z \times z'$$

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On note f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ représentés respectivement par les matrices A et ${}^tA$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. (a) Trouver les sous-espaces vectoriels de dimension 1 stables par f.

(b) Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs quelconques de $\mathbb{R}^3$ et X, Y les matrices colonnes contenant leurs coordonnées dans la base canonique.
Montrer que $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = {}^tXY = {}^tYX$.

(c) En déduire la relation :

$$\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3,\ \forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3,\ \langle \overrightarrow{u}, f(\overrightarrow{v}) \rangle = \langle g(\overrightarrow{u}), \overrightarrow{v} \rangle$$

2. Soit P un plan vectoriel stable par f. On note $P^\perp$ l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux à tout vecteur du plan P, c'est-à-dire $P^\perp = \left\{ \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3 / \forall \overrightarrow{u} \in P, \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0 \right\}$.

(a) Montrer que $P^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1.

(b) Montrer en utilisant la question 1b que $P^\perp$ est une droite stable par g.

(c) Quelles sont les droites vectorielles stables par g ?

(d) Montrer que si D est une droite vectorielle engendrée par le vecteur $\overrightarrow{u} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ alors $D^\perp$ est un plan d'équation $ax + by + cz = 0$.

(e) En déduire les plans vectoriels stables par f.