Corrigé du devoir surveillé

Problème 1

Partie I

1. $\forall \vec{u} \in E,\ \theta(\vec{u}) = \vec{0}$, donc tout vecteur de E appartient au noyau de θ ; ainsi $\ker(\theta) = E$ et $\mathrm{Im}(\theta) = \{\vec{0}\}$.
2. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $\vec{u} \in \ker(f)$; on a donc $f(\vec{u}) = \vec{0}$. Comme f est linéaire, $f^2(\vec{u}) = f\big(f(\vec{u})\big) = f(\vec{0}) = \vec{0}$, d'où $\vec{u} \in \ker(f^2)$. Ainsi $\forall \vec{u} \in E,\ \vec{u} \in \ker(f) \Longrightarrow \vec{u} \in \ker(f^2)$, d'où $\ker(f) \subset \ker(f^2)$.
   De même, soit $\vec{u} \in \ker(f^2)$, donc $f^2(\vec{u}) = \vec{0}$. Comme f est linéaire, $f^3(\vec{u}) = f\big(f^2(\vec{u})\big) = f(\vec{0}) = \vec{0}$, d'où $\vec{u} \in \ker(f^3)$ et $\ker(f^2) \subset \ker(f^3)$.
   On a donc prouvé que $\boxed{\forall f \in \mathscr{L}(E),\ \ker(f) \subset \ker(f^2) \subset \ker(f^3)}$

   Soit à présent $\vec{v} \in \mathrm{Im}(f^3)$; il existe $\vec{u} \in E$ tel que $\vec{v} = f^3(\vec{u})$. Notons $\vec{u}_1 = f(\vec{u})$, on a $\vec{v} = f^2(\vec{u}_1)$ donc $\vec{v} \in \mathrm{Im}(f^2)$. Ainsi $\forall \vec{v} \in E,\ \vec{v} \in \mathrm{Im}(f^3) \Longrightarrow \vec{v} \in \mathrm{Im}(f^2)$, d'où $\mathrm{Im}(f^3) \subset \mathrm{Im}(f^2)$.
   De même, soit $\vec{v} \in \mathrm{Im}(f^2)$, il existe $\vec{u} \in E$ tel que $\vec{v} = f^2(\vec{u})$. Notons $\vec{u}_1 = f(\vec{u})$, on a $\vec{v} = f^(\vec{u}_1)$ donc $\vec{v} \in \mathrm{Im}(f)$. Ainsi $\forall \vec{v} \in E,\ \vec{v} \in \mathrm{Im}(f^2) \Longrightarrow \vec{v} \in \mathrm{Im}(f)$, d'où $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.
   On a donc prouvé que $\boxed{\forall f \in \mathscr{L}(E),\ \mathrm{Im}(f) \supset \mathrm{Im}(f^2) \supset \mathrm{Im}(f^3)}$
3. • Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$, montrons qu'alors $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f^3)$.
   Soit $\vec{v} \in \mathrm{Im}(f^2)$, il existe $\vec{u} \in E$ tel que $\vec{v} = f^2(\vec{u})$, donc en posant $\vec{u}_1 = f(\vec{u})$, on obtient $\vec{v} = f(\vec{u}_1)$, avec $\vec{u}_1 \in \mathrm{Im}(f)$. Or $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$, donc $\vec{u}_1 \in \mathrm{Im}(f^2)$. On en déduit qu'il existe $\vec{u}_2 \in E$ tel que $f^2(\vec{u}_2) = \vec{u}_1$, puis en composant par f, que $\vec{v} = f^3(\vec{u}_2)$, d'où $\vec{v} \in \mathrm{Im}(f^3)$. Tout vecteur de $\mathrm{Im}(f^2)$ appartient à $\mathrm{Im}(f^3)$, on a donc prouvé que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f^3)$. D'après la question précédente, l'inclusion réciproque est toujours vraie, donc finalement $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f^3)$

   On peut donc conclure que $\boxed{\forall f \in \mathscr{L}(E),\ \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \Longrightarrow \mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f^3)}$

   • Soit à présent $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\ker(f) = \ker(f^2)$, montrons qu'alors $\ker(f^2) = \ker(f^3)$.
   Soit $\vec{u} \in \ker(f^3)$, c'est à dire $f^3(\vec{u}) = f^2\Big(f(\vec{u})\Big) = \vec{0}$. Posons $\vec{v}_1 = f(\vec{u})$; $\vec{v}_1 \in \ker(f^2)$. Or $\ker(f^2) = \ker(f)$, donc $\vec{v}_1 \in \ker(f)$. On en déduit que $f(\vec{v}_1) = f\Big(f(\vec{u})\Big) = \vec{0}$, donc $\vec{u} \in \ker(f^2)$. Tout vecteur de $\ker(f^3)$ appartient à $\ker(f^2)$, on a donc prouvé que $\ker(f^3) \subset \ker(f^2)$. D'après la question précédente, l'inclusion réciproque est toujours vraie, donc finalement $\ker(f^2) = \ker(f^3)$

   On peut donc conclure que $\boxed{\forall f \in \mathscr{L}(E),\ \ker(f) = \ker(f^2) \Longrightarrow \ker(f^2) = \ker(f^3)}$
4. (a) Soit $g \in \mathscr{L}(E)$, de rang 3 ; $\ker(g)$ est de dimension 1 (par le théorème du rang). $\mathrm{Im}(g)$ et $\ker(g)$ ne sont pas supplémentaires, donc $\dim\Big(\ker(g) \cap \mathrm{Im}(g)\Big) \geqslant 1$. Or $\Big(\ker(g) \cap \mathrm{Im}(g)\Big) \subset \ker(g)$, donc $\dim\Big(\ker(g) \cap \mathrm{Im}(g)\Big) \leqslant \dim\Big(\ker(g)\Big) = 1$. Ainsi $\ker(g) \cap \mathrm{Im}(g)$ et $\ker(g)$ ont même dimension, et comme $\Big(\ker(g) \cap \mathrm{Im}(g)\Big) \subset \ker(g)$, ils sont égaux, et par conséquent $\ker(g) \subset \mathrm{Im}(g)$.

(b) Construisons g tel que $g(\vec{e}_1) = \vec{e}_2$ et $g(\vec{e}_2) = \vec{0}$. On a alors $\vec{e}_2 \in \mathrm{Im}(g)$ (puisque $\vec{e}_1$ a pour image $\vec{e}_2$ par g) et $\vec{e}_2 \in \ker(g)$. Donc $\vec{e}_2 \in \Big(\ker(g) \cap \mathrm{Im}(g)\Big)$, $\vec{e}_2 \neq \vec{0}$ puisque c'est un vecteur d'une base ; donc le noyau de g et son image ne sont pas supplémentaires. On obtient ainsi les deux premières colonnes de la matrice de g dans la base $\mathscr{B}$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il suffit ensuite de compléter pour obtenir une matrice de rang 3, par exemple $\mathcal{M}\mathrm{at}(g, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. (a) Soit $g \in \mathscr{L}(E)$, de rang 1 ; $\ker(g)$ est de dimension 3 (par le théorème du rang). $\mathrm{Im}(g)$ et $\ker(g)$ ne sont pas supplémentaires, donc $\dim \Big(\ker(g) \cap \mathrm{Im}(g)\Big) \geqslant 1$. Or $\Big(\ker(g) \cap \mathrm{Im}(g)\Big) \subset \mathrm{Im}(g)$, donc $\dim \Big(\ker(g) \cap \mathrm{Im}(g)\Big) \leqslant \dim \Big(\mathrm{Im}(g)\Big) = 1$. Ainsi $\ker(g) \cap \mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$ ont même dimension, et comme $\Big(\ker(g) \cap \mathrm{Im}(g)\Big) \subset \mathrm{Im}(g)$, ils sont égaux, et par conséquent $\mathrm{Im}(g) \subset \ker(g)$.

(b) On procède comme précédemment, en posant $g(\vec{e}_1) = \vec{e}_2$ et $g(\vec{e}_2) = \vec{0}$, ce qui assure que $\mathrm{Im}(g)$ et $\ker(g)$ ne sont pas supplémentaires. Mais comme g est de rang 1, on complète avec $g(\vec{e}_3) = g(\vec{e}_4) = \vec{0}$, ce qui donne comme matrice : $\mathcal{M}\mathrm{at}(g, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie II

1. (a) $\dim \big(\mathrm{Im}(f^2)\big) = 0 \iff f^2 = \theta$; or $f^2 \neq \theta$ donc $\dim \big(\mathrm{Im}(f^2)\big) \geqslant 1$. La formule du rang nous permet alors de conclure que $\dim \big(\ker(f^2)\big) \leqslant 3$.

(b) Soit $\vec{v} \in \mathrm{Im}(f^2)$, il existe $\vec{u} \in E$ tel que $\vec{v} = f^2(\vec{u})$; on en déduit $f(\vec{v}) = f^3(\vec{u}) = \vec{0}$ puisque $f^3 = \theta$, donc $\vec{v} \in \ker(f)$. Ainsi $\mathrm{Im}(f^2) \subset \ker(f)$, et d'après les inclusions de noyaux établies à la question 2, $\boxed{\mathrm{Im}(f^2) \subset \ker(f) \subset \ker(f^2)}$

Pour prouver $\ker(f) \neq \ker(f^2)$, on raisonne par l'absurde : supposons $\ker(f) = \ker(f^2)$, alors d'après la question 3, $\ker(f^2) = \ker(f^3)$, et comme $f^3 = \theta$, il vient $\ker(f) = \ker(f^2) = \ker(f^3) = E$, ce qui est absurde étant donné que $\dim \big(\ker(f^2)\big) \leqslant 3$.

On a donc prouvé $\boxed{\mathrm{Im}(f^2) \subset \ker(f) \subsetneq \ker(f^2)}$

(c) Les inclusions ci dessus entrainent : $1 \leqslant \dim \big(\mathrm{Im}(f^2)\big) \leqslant \dim \big(\ker(f)\big) < \dim \big(\ker(f^2)\big) \leqslant 3$ donc $\mathrm{Im}(f^2)$ et $\ker(f)$ sont de dimension 1 ou 2.

premier cas : $\dim \big(\mathrm{Im}(f^2)\big) = 1$; dans ce cas $\dim \big(\ker(f^2)\big) = 3$ (formule du rang), donc $\ker(f)$ peut être de dimension 1 ou 2.

deuxième cas : $\dim \big(\mathrm{Im}(f^2)\big) = 2$; alors $2 = \dim \big(\mathrm{Im}(f^2)\big) \leqslant \dim \big(\ker(f)\big) \leqslant 2$, donc $\dim \big(\mathrm{Im}(f^2)\big) = \dim \big(\ker(f)\big) = 2$.

(d) – Φ est bien à valeurs dans $\mathrm{Im}(f^2)$, et f étant linéaire, la linéarité de Φ est *induite* par celle de f. En effet, pour tous $\vec{v}$, $\vec{w}$ appartenant à $\mathrm{Im}(f)$ et tout réel λ, on a :

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda \vec{v} + \vec{w}) &= f(\lambda \vec{v} + \vec{w}) \quad \text{car } \lambda \vec{v} + \vec{w} \in \mathrm{Im}(f) \\ &= \lambda f(\vec{v}) + f(\vec{w}) \quad \text{par linéarité de } f \\ &= \lambda \Phi(\vec{v}) + \Phi(\vec{w}) \quad \text{car } \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ appartiennent à } \mathrm{Im}(f). \end{aligned}$$

Soit $\vec{v} \in \ker(\Phi)$, on a $\vec{v} \in \mathrm{Im}(f)$ donc $\Phi(\vec{v}) = f(\vec{v})$; or $\Phi(\vec{v}) = \vec{0}$, donc $f(\vec{v}) = \vec{0}$ et $\vec{v} \in \ker(f)$. Ceci démontre que $\ker(\Phi) \subset \ker(f)$.

– On sait que $f^2 \neq \theta$, donc il existe $\vec{u} \in E$ tel que $f^2(\vec{u}) \neq \vec{0}$. Posons $\vec{v} = f(\vec{u})$: $\vec{v} \in \mathrm{Im}(f)$ donc $\Phi(\vec{v}) = f(\vec{v}) = f^2(\vec{u}) \neq \vec{0}$. On en conclut que Φ n'est pas l'application nulle. Donc $\mathrm{Im}(\Phi)$ est de dimension supérieure ou égale à 1, mais comme $\mathrm{Im}(\Phi) \subset \mathrm{Im}(f^2)$ qui est de dimension 1 par hypothèse, on obtient $\dim \big(\mathrm{Im}(\Phi)\big) = \dim \big(\mathrm{Im}(f^2)\big) = 1$.

– Le théorème du rang appliqué à Φ donne :
$\dim\big(\ker(\Phi)\big) = \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) - \dim\big(\mathrm{Im}(\Phi)\big) = 3 - 1 = 2.$

– On a montré précédemment que $\ker(\Phi) \subset \ker(f)$, mais $\ker(f)$ est de dimension 1, donc $\ker(\Phi)$ ne peut être de dimension 2.

(e) $\ker(f)$ étant de dimension 2, on obtient par la formule du rang que $\mathrm{Im}(f)$ est aussi de dimension 2. Par conséquent $\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = \dim\big(\mathrm{Im}(f^2)\big)$, mais comme on a montré précédemment (partie I question 2) que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f^2)$, cela entraine $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$. L'implication prouvée partie I question 3 donne alors $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f^3)$, ce qui est impossible puisque $\mathrm{Im}(f^3) = \{\vec{0}\}$.

(f) Les deux cas étudiés ci-dessus aboutissent à des contradictions, la seule possibilité est donc $\dim\big(\mathrm{Im}(f^2)\big) = 1$ et $\dim\big(\ker(f)\big) = 2 = \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)$.

2. (a) $\vec{\imath}$ existe puisque par hypothèse $f^2 \neq \theta$. De plus $f^2(\vec{\imath}) \in \ker(f)$ mais n'engendre pas $\ker(f)$ qui est de dimension 2. Il existe donc un vecteur $\vec{\ell}$ appartenant à $\ker(f) \setminus \big\{f^2(\vec{\imath})\big\}$, c'est à dire tel que la famille $\langle\, f^2(\vec{\imath}),\, \vec{\ell}\,\rangle$ est libre.

(b) – Soient α, β, γ, δ des réels tels que $\alpha\,\vec{\imath} + \beta\,\vec{\jmath} + \gamma\,\vec{k} + \delta\,\vec{\ell} = \vec{0}$
on compose par f : $\alpha \underbrace{f(\vec{\imath})}_{\vec{\jmath}} + \beta \underbrace{f(\vec{\jmath})}_{f^2(\vec{\imath})=\vec{k}} + \gamma \underbrace{f(\vec{k})}_{f^3(\vec{\imath})=\vec{0}} + \delta \underbrace{f(\vec{\ell})}_{\vec{0}\,\text{car}\,\vec{\ell}\in\ker(f)} = \vec{0} = \alpha\,\vec{\jmath} + \beta\,\vec{k}\ (\star)$
on compose à nouveau par f : $\alpha\,\vec{k} = \vec{0}$; comme $\vec{k} \neq \vec{0}$, on en déduit $\alpha = 0$
on reporte dans $(\star)$: $\beta\,\vec{k} = \vec{0}$, donc $\beta = 0$; et enfin dans l'égalité de départ : $\gamma\,\vec{k} + \delta\,\vec{\ell} = \vec{0}$, et comme la famille $\langle\,\vec{k},\, \vec{\ell}\,\rangle$ est libre, $\gamma = \delta = 0$.
On a prouvé : $\forall(\alpha,\, \beta,\, \gamma,\, \delta) \in \mathbb{R}^4, \quad \alpha\,\vec{\imath} + \beta\,\vec{\jmath} + \gamma\,\vec{k} + \delta\,\vec{\ell} = \vec{0} \Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, donc la famille $\langle\, f^2(\vec{\imath}),\, \vec{\jmath},\, \vec{k},\, \vec{\ell}\,\rangle$ est libre ; E étant de dimension 4, c'est une base de E.

– La matrice de f dans cette base est
$$\begin{array}{c} \\ \vec{\imath} \\ \vec{\jmath} \\ \vec{k} \\ \vec{\ell} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(\vec{\imath}) & f(\vec{\jmath}) & f(\vec{k}) & f(\vec{\ell}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Partie III

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 3 \\ -6 & -12 & -18 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & 12 & 18 & 6 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. On constate que A^2 est de rang 1, en effet toutes les colonnes de la matrice sont proportionnelles : $C_4 = C_1$, $C_2 = 2\,C_1$ et $C_3 = 3\,C_1$; donc $\mathrm{Im}\big(f^2\big)$ est engendré par $f^2(\vec{e}_1)$ par exemple :

$$\boxed{\mathrm{Im}\big(f^2\big) = \mathrm{Vect}\langle\, 3\,\vec{e}_1 - 6\,\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 6\,\vec{e}_4\,\rangle}$$

$\ker\big(f^2\big)$ est donc de dimension 3 ; les relations observées sur les colonnes de A^2 entrainent que $\vec{e}_1 - \vec{e}_4$, $2\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ et $3\,\vec{e}_1 - \vec{e}_3$ appartiennent au noyau de f^2.
On vérifie que ces 3 vecteurs forment une famille libre, et donc une base de $\ker\big(f^2\big)$, pour cela on résout : $\alpha\,\big(\vec{e}_1 - \vec{e}_4\big) + \beta\,\big(2\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2\big) + \gamma\,\big(3\,\vec{e}_1 - \vec{e}_3\big) = \vec{0}$, avec $(\alpha,\, \beta,\, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.
On obtient $(\alpha + 2\,\beta + 3\,\gamma)\,\vec{e}_1 - \beta\,\vec{e}_2 - \gamma\,\vec{e}_3 - \alpha\,\vec{e}_4 = \vec{0}$, dont l'unique solution est $\alpha = \beta = \gamma = 0$

$$\boxed{\ker\big(f^2\big) = \mathrm{Vect}\langle\, \vec{e}_1 - \vec{e}_4\,,\ 2\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2\,,\ 3\,\vec{e}_1 - \vec{e}_3\,\rangle}$$

3. $\ker\bigl(f^2\bigr)$ a pour équations cartésiennes : $y+t=0$ et $x+y+3\,z=0$ par exemple, donc un vecteur $\vec{\ell}$ possible est $\vec{\ell}=\vec{e}_1-\vec{e}_2+\vec{e}_4$.

   On est dans le cas étudié à la partie II : f est de rang 2, $\ker(f)$ est de dimension 2, la base $\langle\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\,,\,\vec{\ell}\,\rangle$ égale à $\langle\,\vec{\imath},\,f(\vec{\imath})\,,\,f^2(\vec{\imath})\,,\vec{\ell}\,\rangle$, devient ici $\langle\,\vec{e}_1\,,\,f(\vec{e}_1)\,,\,f^2(\vec{e}_1)\,,\vec{\ell}\,\rangle$.

4. $f(\vec{e}_1)$ et $f^2(\vec{e}_1)$ appartiennent bien sûr à $\mathrm{Im}(f)$, et comme la famille $\langle\,f(\vec{e}_1)\,,\,f^2(\vec{e}_1)\,\rangle$ est une sous-famille d'une base, elle est libre. On connait la dimension de $\mathrm{Im}(f)$, qui est égale au cardinal de cette famille, on peut donc affirmer que $\langle\,f(\vec{e}_1)\,,\,f^2(\vec{e}_1)\,\rangle$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

   $f^2(\vec{e}_1)\in\ker(f)$ puisque $f^3=\theta$, $\vec{\ell}\in\ker(f)$ d'après le calcul de la question 3 ; la famille $\langle\,f^2(\vec{e}_1)\,,\vec{\ell}\,\rangle$ est libre en tant que sous-famille d'une base, son cardinal est égal à la dimension de $\ker(f)$, c'en est donc une base.

$$\boxed{\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}\langle\,f(\vec{e}_1)\,,\,f^2(\vec{e}_1)\,\rangle,\quad \ker(f)=\mathrm{Vect}\langle\,f^2(\vec{e}_1)\,,\vec{\ell}\,\rangle}$$

5. On a $f(\vec{e}_1)=\vec{e}_1-3\,\vec{e}_2+\vec{e}_3+2\,\vec{e}_4$, $f^2(\vec{e}_1)=3\,\vec{e}_1-6\,\vec{e}_2+\vec{e}_3+6\,\vec{e}_4$, $\vec{\ell}=\vec{e}_1-\vec{e}_2+\vec{e}_4$, donc la matrice de passage est $P=\begin{pmatrix}1&1&3&1\\0&-3&-6&-1\\0&1&1&0\\0&2&6&1\end{pmatrix}$

6. $P^{-1}\,A\,P$ est la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$, c'est donc la matrice B calculée à la dernière question de la partie II.

Problème 2

1. (a) $\mathbb{F}_\alpha$ est un sous-ensemble de $\mathbb{E} = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, non vide car la fonction nulle appartient à $\mathbb{F}_\alpha$ (en prenant $P = Q = 0$). Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{F}_\alpha$ et λ un réel quelconque :
$f \in \mathbb{F}_\alpha$ donc il existe deux polynômes $P_1,\ Q_1$, de degrés inférieurs ou égaux à 1 tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = P_1(x)\,\mathrm{e}^{\alpha\, x} + Q_1(x)\,\mathrm{e}^{-\alpha\, x}$; de même,$g \in \mathbb{F}_\alpha$ donc il existe deux polynômes $P_2,\ Q_2$, de degrés inférieurs ou égaux à 1 tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = P_2(x)\,\mathrm{e}^{\alpha\, x} + Q_2(x)\,\mathrm{e}^{-\alpha\, x}$.
On a donc $\forall x \in \mathbb{R},\ \big(\lambda\, f(x) + g(x)\big) = \big(\lambda\, P_1(x) + P_2(x)\,\big)\mathrm{e}^{\alpha\, x} + \big(\lambda\, Q_1(x) + Q_2(x)\big)\,\mathrm{e}^{-\alpha\, x}$; $\lambda\, P_1 + P_2$ et $\lambda\, Q_1 + Q_2$ sont des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à 1, donc la fonction $\lambda\, f + g$ est bien une fonction appartenant à $\mathbb{F}_\alpha$. $\mathbb{F}_\alpha$ est inclus dans $\mathbb{E}$, non vide et stable par combinaison linéaire, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$.

   (b) Tout d'abord on vérifie que les 4 fonctions sont bien éléments de $\mathbb{F}_\alpha$: les polynômes P et Q sont 1 et 0 pour f_1, X et 0 pour f_2 etc...
Soit f un élément de $\mathbb{F}_\alpha$, P et Q des polynômes de degré inférieurs ou égaux à 1 associés à f ; il existe 4 réels $a,\ b,\ c,\ d$ tels que l'on ait : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = b + a\, x$ et $Q(x) = c + d\, x$. Par conséquent f peut s'écrire : $f = a\, f_1 + b\, f_2 + c\, f_3 + d\, f_4$; la famille $\big(f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4\big)$ engendre donc $\mathbb{F}_\alpha$. Montrons à présent qu'elle est libre : on résout $a\, f_1 + b\, f_2 + c\, f_3 + d\, f_4 = 0$, où $a,\ b,\ c,\ d$ sont des réels quelconques :
$a\, f_1 + b\, f_2 + c\, f_3 + d\, f_4 = 0 \iff \forall x \in \mathbb{R},\ a\,\mathrm{e}^{\alpha\, x} + b\, x\,\mathrm{e}^{\alpha\, x} + c\,\mathrm{e}^{-\alpha\, x} + d\, x\,\mathrm{e}^{-\alpha\, x} = 0$.
Comme $\mathrm{e}^{\alpha\, x}$ n'est jamais nul, on a aussi en divisant par $\mathrm{e}^{\alpha\, x}$:
$\forall x \in \mathbb{R},\ a + b\, x + c\,\mathrm{e}^{-2\alpha\, x} + d\, x\,\mathrm{e}^{-2\alpha\, x} = 0$; et de même en divisant par $\mathrm{e}^{-\alpha\, x}$:
$\forall x \in \mathbb{R},\ a\,\mathrm{e}^{2\alpha\, x} + b\, x\,\mathrm{e}^{2\alpha\, x} + c + d\, x = 0$.
En écrivant que la première équation est vérifiée entre autres pour $x = 0$, on obtient : $a + c = 0$; en faisant tendre x vers $+\infty$ dans la deuxième, on obtient $b = 0$ (car si $b \neq 0$ alors la limite est infinie ce qui contredit le fait que l'expression est nulle pour tout x) et en faisant tendre x vers $-\infty$ dans la troisième, on obtient $d = 0$.
En reportant dans l'équation de départ, on a alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ a\,\mathrm{e}^{\alpha\, x} - a\,\mathrm{e}^{-\alpha\, x} = 0$, puis en dérivant : $\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha\, a\big(\mathrm{e}^{\alpha\, x} + \mathrm{e}^{-\alpha\, x}\big) = 0$. En prenant à nouveau $x = 0$, on obtient $a = 0$ (puisque α n'est pas nul).
Finalement, $a\, f_1 + b\, f_2 + c\, f_3 + d\, f_4 = 0 \iff a = b = c = d = 0$ donc la famille est libre ; c'est donc une base de $\mathbb{F}_\alpha$.

2. (a) La dérivée d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ est aussi de classe $\mathscr{C}^\infty$, donc si $f \in \mathbb{E}$, alors $D(f) \in \mathbb{E}$. D'autre part, pour toutes fonctions f et g dérivables (donc aussi pour des fonctions de $\mathbb{E}$) et pour tout réel λ, on a $\lambda\, f + g$ est dérivable et $(\lambda\, f + g)' = \lambda\, f' + g'$; ainsi $D(\lambda\, f + g) = \lambda\, D(f) + D(g)$. D est donc un endomorphisme de $\mathbb{E}$.
Noyau de D : $D(f) = 0 \iff f$ est une fonction constante sur $\mathbb{R}$, donc $\ker(D) = \mathrm{Vect}\langle\, 1\,\rangle$.
Image de D : Toute fonction continue sur un intervalle y admet des primitives (théorème de Darboux) ; donc toute fonction de $\mathbb{E}$ a comme antécédent par D l'une de ses primitives. On en déduit que D est surjective, c'est à dire $\mathrm{Im}(D) = \mathbb{E}$.

   (b) La linéarité de D_α est induite par celle de D ; il suffit donc de vérifier que toute fonction de F_α a pour image par D_α une fonction de F_α : $D_\alpha(f_1) = f_1' = \alpha\, f_1 \in F_\alpha$; de même $f_2' = f_1 + \alpha\, f_2,\ f_3' = -\alpha\, f_3$ et $f_4' = f_3 - \alpha\, f_4$. Les 4 vecteurs de base de F_α ont leurs images dans F_α, donc par linéarité de D_α, l'image de toute fonction de F_α appartient à D_α. D_α est donc un endomorphisme de F_α.

(c) On a calculé les images de f_1, f_2, f_3, f_4 par D_α, la matrice de D_α dans cette base est donc $M_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}$

(d) M_α est une matrice triangulaire, sans coefficient nul sur la diagonale, elle est donc inversible.

3. La matrice de $D_\alpha^2 - \lambda\,\mathrm{Id}_\alpha$ est égale à $\begin{pmatrix} \alpha^2-\lambda & 2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2-\lambda & -2\alpha \\ & 0 & 0 & \alpha^2-\lambda \end{pmatrix}$.

C'est une matrice triangulaire, donc si $\lambda \neq \alpha^2$, ces coefficients diagonaux sont tous non nuls et elle est inversible, donc l'endomorphisme $D_\alpha^2 - \lambda\,\mathrm{Id}_\alpha$ est de rang 4 ; si $\lambda = \alpha^2$, la matrice est de rang 2 (deux colonnes nulles et les deux autres non colinéaires).

4. (a) On a de façon immédiate que f_1 et f_3 appartiennent à $\ker\big(D_\alpha^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}_\alpha\big)$ (les colonnes correspondantes de la matrice sont nulles) et comme $D_\alpha^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}_\alpha$ est de rang 2, son noyau est de dimension $4-2=2$. La famille (f_1, f_3) est libre (en tant que sous-famille d'une base), c'est donc une base de $\ker\big(D_\alpha^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}_\alpha\big)$.

D'autre part on constate que $\big(D_\alpha^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}_\alpha\big)(f_2) = 2\,\alpha\,f_1$, $\big(D_\alpha^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}_\alpha\big)(f_4) = -2\,\alpha\,f_3$, donc f_1 et f_3 appartiennent à $\mathrm{Im}\big(D_\alpha^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}_\alpha\big)$ (avec comme antécédents respectifs $\frac{1}{\alpha}\,f_2$ et $\frac{-1}{\alpha}\,f_4$ par exemple). (f_1, f_3) est une famille libre de $\mathrm{Im}\big(D_\alpha^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}_\alpha\big)$, qui est justement de dimension 2 ; c'en est donc une base.

(b) On a $\ker\big(D_\alpha^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}_\alpha\big) = \mathrm{Vect}\langle\, f_1\,,\, f_3\,\rangle = \mathrm{Im}\big(D_\alpha^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}_\alpha\big)$. Soit $f \in \mathbb{F}_\alpha$:
$\big(D_\alpha^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}_\alpha\big)(f) \in \mathrm{Im}\big(D_\alpha^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}_\alpha\big)$, et comme le noyau et l'image sont égaux,
$\big(D_\alpha^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}_\alpha\big)(f) \in \ker\big(D_\alpha^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}_\alpha\big)$; par conséquent $\big(D_\alpha^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}_\alpha\big)^2(f) = 0$.

$$\boxed{\big(D_\alpha^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}_\alpha\big)^2 \text{ est donc l'endomorphime nul de } \mathbb{F}_\alpha}$$

(c) $\big(D_\alpha^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}_\alpha\big)^2 = D_\alpha^4 - 2\,\alpha^2 D_\alpha^2 + \alpha^4 \mathrm{Id}_\alpha = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{F}_\alpha)}$, donc :
$D_\alpha \circ \left(\dfrac{2\,\alpha^2 D_\alpha - D_\alpha^3}{\alpha^4}\right) = \left(\dfrac{2\,\alpha^2 D_\alpha - D_\alpha^3}{\alpha^4}\right) \circ D_\alpha = \mathrm{Id}_\alpha$.

$$\boxed{D_\alpha \text{ est inversible et } D_\alpha^{-1} = \frac{2\,\alpha^2 D_\alpha - D_\alpha^3}{\alpha^4}}$$

5. (a) On a une équation différentielle linéaire d'ordre deux à coefficients constants ; l'équation caractéristique associée est $x^2 - \alpha^2 = 0$ qui admet deux racines réelles distinctes α et $-\alpha$. L'ensemble des solutions est constitué des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto A\,\mathrm{e}^{\alpha x} + B\,\mathrm{e}^{-\alpha x}$ où A et B sont des constantes réelles quelconques. On remarque que f_1 et f_3 sont solutions de cette équation, et que toute solution s'exprime comme combinaiason linéaire de f_1 et f_3. En notant $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de cette équation différentielle, on a donc

$$\boxed{\mathcal{S} = \mathrm{Vect}\langle\, f_1\,,\, f_3\,\rangle}$$

(b) $f \in \ker\big(D_\alpha^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}_\alpha\big) \iff f \in \mathbb{E}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) - \alpha^2 f(x) = 0$, donc f est solution de l'équation différentielle résolue à la question précédente. Comme toutes les solutions de cette équation différentielle sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, c'est à dire appartiennent à $\mathbb{E}$, on en déduit $\boxed{\ker\big(D_\alpha^2 - \alpha^2\,\mathrm{Id}_\alpha\big) = \mathrm{Vect}\langle\, f_1\,,\, f_3\,\rangle}$

(c) Soit $f \in \mathbb{E}$: $f \in \ker\left(\left(D_\alpha^2 - \alpha^2 \operatorname{Id}_\alpha\right)^2\right) \iff \left(D_\alpha^2 - \alpha^2 \operatorname{Id}_\alpha\right)(f) \in \ker\left(D_\alpha^2 - \alpha^2 \operatorname{Id}_\alpha\right)$, c'est à dire $\left(D_\alpha^2 - \alpha^2 \operatorname{Id}_\alpha\right)(f) \in \operatorname{Vect}\langle f_1 , f_3 \rangle$. Il existe donc deux constantes réelles λ_1 et λ_3 telles que $\left(D_\alpha^2 - \alpha^2 \operatorname{Id}_\alpha\right)(f) = \lambda_1 f_1 + \lambda_3 f_3$.
On a calculé précédemment $\left(D_\alpha^2 - \alpha^2 \operatorname{Id}_\alpha\right)(f_2) = 2\,\alpha\, f_1$ et $\left(D_\alpha^2 - \alpha^2 \operatorname{Id}_\alpha\right)(f_4) = -2\,\alpha\, f_3$, donc $\left(D_\alpha^2 - \alpha^2 \operatorname{Id}_\alpha\right)(g) = \left(D_\alpha^2 - \alpha^2 \operatorname{Id}_\alpha\right)(f) - \dfrac{\lambda_1}{2\,\alpha} \times 2\,\alpha\, f_1 + \dfrac{\lambda_3}{2\,\alpha} \times (-2\,\alpha\, f_3) = 0$.
En conclusion, $f \in \ker\left(\left(D_\alpha^2 - \alpha^2 \operatorname{Id}_\alpha\right)^2\right) \iff \exists(\lambda_1, \lambda_3) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f - \dfrac{\lambda_1}{2\,\alpha} f_2 + \dfrac{\lambda_3}{2\,\alpha} f_4 \in \ker\left(D_\alpha^2 - \alpha^2 \operatorname{Id}_\alpha\right)$, ou encore $f - \dfrac{\lambda_1}{2\,\alpha} f_2 + \dfrac{\lambda_3}{2\,\alpha} f_4 \in \operatorname{Vect}\langle f_1 , f_3 \rangle$. Il existe donc des constantes réelles μ_1 et μ_3 telles que $f - \dfrac{\lambda_1}{2\,\alpha} f_2 + \dfrac{\lambda_3}{2\,\alpha} f_4 = \mu_1 f_1 + \mu_3 f_3$. On peut alors poser $\mu_2 = \dfrac{\lambda_1}{2\,\alpha}$ et $\mu_4 = -\dfrac{\lambda_3}{2\,\alpha}$ et on obtient

$$\boxed{\ker\left(\left(D_\alpha^2 - \alpha^2 \operatorname{Id}_\alpha\right)^2\right) = \operatorname{Vect}\langle f_1 , f_2 , f_3 , f_4 \rangle = \mathbb{F}_\alpha}$$

6. On remarque que $f \in \ker\left(\left(D_1^2 - \operatorname{Id}_1\right)^2\right) \iff f^{(4)} - 2\,f'' + f = 0 \iff f$ est solution de l'équation différentielle d'ordre 4 proposée, en prenant $\alpha = 1$. L'ensemble des solutions de cette équation différentielle est donc l'ensemble $\mathbb{F}_1$.
7. (a) Supposons que $\mathscr{E}$ possède une solution polynômiale f_0 et cherchons son degré ; les dérivées successives de f_0 sont de degré strictement inférieur à f_0 (sauf si $f_0 = 0$ ce qui n'est pas) donc le degré de f_0 est égal au degré de $x^3 - 12\,x + 2$, c'est à dire 3. On pose alors $f_0(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$, $f_0^{(4)}$ est le polynôme nul et $f_0''(x) = 6\,a\,x + 2\,b$. Donc par identification, on a : $-2\,(6\,a\,x + 2\,b) + a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d = x^3 - 12\,x + 2$ et on obtient $f_0(x) = x^3 + 2$.
   (b) Soit f une solution quelconque de $\mathscr{E}$; alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(4)}(x) - 2\,f''(x) + f(x) = x^3 - 12\,x + 2$.
   Or f_0 est solution de $\mathscr{E}$ donc on a aussi $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_0^{(4)}(x) - 2\,f_0''(x) + f_0(x) = x^3 - 12\,x + 2$.
   En soustrayant membre à membre : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(f - f_0)^{(4)}(x) - 2\,(f - f_0)''(x) + (f - f_0)(x) = 0$
   Ainsi $f - f_0$ est solution de l'équation sans second membre, résolue à la question 6, donc $f - f_0 \in \ker\left(\left(D_1^2 - \operatorname{Id}_1\right)^2\right)$. Il existe donc 4 constantes réelles, λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 telles que $f - f_0 = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4$, avec $\alpha = 1$.
   Réciproquement, soit $f = f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4$, où λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 sont des constantes réelles quelconques.
   $\left(D_1^2 - \operatorname{Id}_1\right)(f) =$
   $\left(D_1^2 - \operatorname{Id}_1\right)(f_0) + \lambda_1 \underbrace{\left(D_1^2 - \operatorname{Id}_1\right)(f_1)}_{0} + \lambda_2 \underbrace{\left(D_1^2 - \operatorname{Id}_1\right)(f_2)}_{2\,\alpha\, f_1} + \lambda_3 \underbrace{\left(D_1^2 - \operatorname{Id}_1\right)(f_3)}_{0} + \lambda_4 \underbrace{\left(D_1^2 - \operatorname{Id}_1\right)(f_4)}_{-2\,\alpha\, f_3}$
   d'où
   $\left(D_1^2 - \operatorname{Id}_1\right)^2(f) = \left(D_1^2 - \operatorname{Id}_1\right)^2(f_0) + 2\,\alpha\,\lambda_2\left(D_1^2 - \operatorname{Id}_1\right)(f_1) - 2\,\alpha\,\lambda_4\left(D_1^2 - \operatorname{Id}_1\right)(f_3)$
   $= \left(D_1^2 - \operatorname{Id}_1\right)^2(f_0)$. Or $\left(D_1^2 - \operatorname{Id}_1\right)^2(f_0)$ est la fonction polynôme $x \mapsto x^3 - 12\,x + 2$, donc f est solution de $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}$. En conclusion

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Les solutions de } \mathscr{E} \text{ sont toutes les fonctions définies sur } \mathbb{R} \text{ par} \\ x \longmapsto x^3 + 2 + \lambda_1\,\mathrm{e}^x + \lambda_2\,x\,\mathrm{e}^x + \lambda_3\,\mathrm{e}^{-x} + \lambda_4\,x\,\mathrm{e}^{-x} \\ \text{où } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \text{ sont des constantes réelles quelconques.}\end{array}}$$