Corrigé du devoir n^o 7

Exercice 1

Première situation

1. $F(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } x<0 \text{ et } y<0 \\ x\,y \text{ si } (x,y)\in[0,1]^2 \\ x \text{ si } x\in[0,1] \text{ et } y>1 \\ y \text{ si } y\in[0,1] \text{ et } x>1 \\ 1 \text{ si } (x,y)\in]1,+\infty[^2 \end{cases}$

2. Une densité est $f(x,y)=1$ si $(x,y)\in[0,1]^2$ et 0 sinon.

3. (a) X est à valeurs non nulles, donc la variable aléatoire $\frac{Y}{X}$ est bien définie ; de plus X et Y sont à valeurs positives, donc leur quotient également.

   (b) Pour $t\leqslant 1$, $P(Z\leqslant t)$ est l'aire du triangle OAM, donc $P(Z\leqslant t)=\dfrac{t}{2}$

   (c) Pour $t>1, 1-P(Z\leqslant t)$ est l'aire du triangle OBM, donc $P(Z\leqslant t)=1-\dfrac{1}{2\,t}$.

   (d) La fonction de répartition F_Z de Z est définie par :

   $$\forall t\in\mathbb{R},\ F_Z(t)=\begin{cases} 0 \text{ si } t<0 \\ \dfrac{t}{2} \text{ si } t\in[0,1] \\ 1-\dfrac{1}{2\,t} \text{ si } t>1 \end{cases}$$

   F_Z est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, donc Z est une variable à densité, dont une densité g est donnée par :

   $$\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\ g(t)=\begin{cases} 0 \text{ si } t<0 \\ \dfrac{1}{2} \text{ si } t\in[0,1] \\ \dfrac{1}{2\,t^2} \text{ si } t>1 \end{cases}}$$

Seconde situation

1. On détermine F_Y, la fonction de répartition de Y : soit $t\in\mathbb{R}$
   $[Y\leqslant t]=[X\geqslant 1-t]=[X>1-t]$ car X est une variable à densité ; donc $F_Y(t)=1-F_X(1-t)$.
   - Si $t\leqslant 0$, alors $1-t\geqslant 1$, $F_X(1-t)=1$ donc $F_Y(t)=0$.
   - Si $t\in]0,1[$, alors $1-t\in]0,1[$, $F_X(1-t)=1-t$ donc $F_Y(t)=1-(1-t)=t$.
   - Si $t\geqslant 1$, alors $1-t\leqslant 0$, $F_X(1-t)=0$ donc $F_Y(t)=1$.

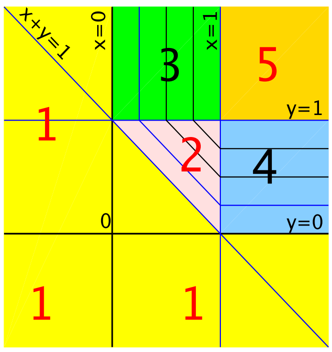
   F_Y et F_X sont égales, donc X et Y suivent la même loi, $\mathcal{U}_{[0,1]}$.

2. Par définition, on a pour tout couple $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $F(x,y)=P\Big([X\leqslant x]\cap[Y\leqslant y]\Big)$.

   X et Y sont à valeurs dans $]0,1[$ donc si $x\leqslant 0$ ou $y\leqslant 0$, alors $F(x,y)=0$.

   Supposons à présent $(x,y)\in\Big(]0,+\infty[\Big)^2$: $F(x,y)=P\Big([X\leqslant x]\cap[1-X\leqslant y]\Big)=P\Big(1-y\leqslant X\leqslant x\Big)$
   - Si $x+y<1$, alors $1-y>x$, donc $F(x,y)=0$
   - Si $x+y\geqslant 1$, alors :
     - Si $x\geqslant 1$, alors $[1-y\leqslant X\leqslant x]=[1-y\leqslant X]$, donc $F(x,y)=y$ si $y<1$ et 1 sinon.
     - De même si $y\geqslant 1$, alors $1-y\leqslant 0$, donc $F(x,y)=x$ si $x<1$ et 1 sinon.
     - Si $(x,y)\in[0,1]^2$, $F(x,y)=x-(1-y)=x+y-1$

3. La région 1 correspond à $F(x,y)=0$, la région 5 correspond à $F(x,y)=1$.
   Les lignes de niveau α se déplacent vers le haut et la droite lorsque α augmente.



4. Y est à valeurs srictement positives donc Z est bien définie, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Soit $t \in \mathbb{R}$:
   Si $t \leqslant 0$ alors $F_Z(t) = P(Z \leqslant t) = 0$
   Si $t > 0$, $\big[Z \leqslant t\big] = \underbrace{\big[X \leqslant t\,Y\big]}_{\text{car } Y>0} = \big[X \leqslant t\,(1-X)\big] = \big[(1+t)\,X \leqslant t\big] = \big[X \leqslant \frac{t}{1+t}\big]$ car $1+t>0$.
   Lorsque $t > 0$, $\dfrac{t}{1+t} \in]0,1[$ donc $F_Z(t) = \dfrac{t}{1+t}$
   $$\boxed{F_Z(t) = \frac{t}{1+t} \text{ si } t > 0\ ;\ F_Z(t) = 0 \text{ si } t \leqslant 0}$$
   F_Z est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$; une densité de Z est donnée par : $f_Z(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$ si $t > 0$ et 0 sinon.
   $$\boxed{f_Z(t) = \frac{1}{(1+t)^2} \text{ si } t > 0\ ;\ f_Z(t) = 0 \text{ si } t \leqslant 0}$$
5. La loi de Y sachant $[X = x]$ (pour $x \in]0,1[$) n'est pas une loi à densité, mais une loi certaine, égale à x. Donc (X,Y) n'est pas un couple à densité.
   On pouvait remarquer aussi que si $Z = (X,Y)$ est un couple de variables aléatoires à densité, admettant F comme fonction de répartition et dont une densité est f ; alors si F est continue au voisinage de (x,y), $f(x,y) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}(x,y)$. Or F admet des dérivées partielles d'ordre 2 en tout point de $\mathbb{R}^2$ privé des droites d'équations $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ et du segment $[A,B]$ où $A(0,1)$ et $B(1,0)$. En tout point où ses dérivées partielles existent, on a $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}(x,y) = 0$.

Exercice 2

1. $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{x=-\infty}^{0}\int_{y=-\infty}^{+\infty} 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{x=0}^{+\infty}\int_{y=-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{x=0}^{+\infty}\int_{y=0}^{x} k\,\mathrm{e}^{y-3x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{x=0}^{+\infty}\int_{y=x}^{+\infty} 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
   $\displaystyle = \int_{x=0}^{+\infty} k\,\mathrm{e}^{-3x}\Big[\mathrm{e}^y\Big]_0^x\,\mathrm{d}x = k\int_{x=0}^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-3x}\right)\mathrm{d}x = k\left[\frac{\mathrm{e}^{-3x}}{3} - \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{2}\right]_0^{+\infty} = \frac{k}{6}.$
   f est une densité de probabilité, donc $\boxed{k = 6}$
2. Soit $x \in \mathbb{R}$; si $x < 0$ alors $\forall y \in \mathbb{R}$, $f(x,y) = 0$ donc $f_X(x) = 0$ et si $x \geqslant 0$
   $\displaystyle f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}y + \int_0^x 6\,\mathrm{e}^{y-3x}\,\mathrm{d}y + \int_x^{+\infty} 0\,\mathrm{d}y = 6\left(\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-3x}\right)$
   De même soit $y \in \mathbb{R}$; si $y < 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x,y) = 0$ donc $f_Y(y) = 0$ et si $y \geqslant 0$
   $\displaystyle f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{y} 0\,\mathrm{d}x + \int_y^{+\infty} 6\,\mathrm{e}^{y-3x}\,\mathrm{d}x = 6\,\mathrm{e}^y \times \frac{\mathrm{e}^{-3y}}{3} = 2\,\mathrm{e}^{-2y}$. On remarque que $Y \hookrightarrow \mathscr{E}(2)$.
   $$\boxed{\begin{array}{ll} f_X(x) = 6\left(\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-3x}\right) & \text{si } x \geqslant 0 \text{ et } 0 \text{ sinon} \\ f_Y(y) = 2\,\mathrm{e}^{-2y} & \text{si } y \geqslant 0 \text{ et } 0 \text{ sinon} \end{array}}$$
3. Pour x et y positifs, on n'a pas $f_X(x)\,f_Y(y) = f(x,y)$ donc X et Y ne sont pas indépendantes.
4. X et Y sont à valeurs positives donc $\big(X+Y\big)(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$ donc pour $t < 0$, $P\big(X+Y \leqslant t\big) = 0$.
   Soit $t \geqslant 0$: $\displaystyle P\big(X+Y \leqslant t\big) = \int_{y=0}^{\frac{t}{2}}\int_{x=y}^{t-y} 6\,\mathrm{e}^{y-3x}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{y=0}^{\frac{t}{2}}\Big(2\,\mathrm{e}^y\left(\mathrm{e}^{-3y} - \mathrm{e}^{3(y-t)}\right)\Big)\,\mathrm{d}y = \left[-\mathrm{e}^{-2y} - \frac{\mathrm{e}^{4y-3t}}{2}\right]_0^{\frac{t}{2}}$
   $$\boxed{P\big(X+Y \leqslant t\big) = 1 + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-3t} - \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-t} \text{ si } t \geqslant 0 \text{ et } 0 \text{ sinon}}$$
5. La fonction de répartition de $X+Y$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, donc une densité f de $X+Y$ s'obtient en dérivant F : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \dfrac{3}{2}\left(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-3t}\right) \text{ pour } t \geqslant 0 \text{ et } 0 \text{ sinon}}$

Problème

Partie I

1. Par linéarité de l'espérance, $E(T_n) = E\big(\Delta_1 + \cdots + \Delta_n\big) = E(\Delta_1) + \cdots + E(\Delta_n) = n \times \dfrac{1}{a}$.

   Les variables $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ sont indépendantes, donc $V(T_n) = V\big(\Delta_1 + \cdots + \Delta_n\big) = V(\Delta_1) + \cdots + V(\Delta_n) = n \times \dfrac{1}{a^2}$.

$$\boxed{E(T_n) = \frac{n}{a}\ ,\ V(T_n) = \frac{n}{a^2}}$$

2. Δ_1 et Δ_2 sont indépendantes donc une densité de T_2 est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_2(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, f(x-t)\,\mathrm{d}t$

   Pour $t < 0$, $f(t) = 0$ donc $f_2(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, f(x-t)\,\mathrm{d}t$; de même pour $x < t$, $f(x-t) = 0$ donc

   Si $x \geqslant 0$, $f_2(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, f(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x a\,\mathrm{e}^{-a\,t} \times a\,\mathrm{e}^{-a\,(x-t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^x a^2\,\mathrm{e}^{-a\,x}\,\mathrm{d}t = a^2\,x\,\mathrm{e}^{-a\,x}$ et

   si $x < 0$ alors $\forall t \geqslant 0$ on a $x - t < 0$ donc $f_2(x) = 0$.

3. T_n admet une densité pour $n = 1$ ou 2.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$: on suppose que T_n est une variable à densité, dont une densité f_n est donnée par :

   $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = a^n\,\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{e}^{-a\,x}$ si $x \geqslant 0$ et 0 sinon.

   Les variables $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ sont indépendantes, donc Δ_{n+1} et T_n sont indépendantes, par conséquent T_{n+1} admet une densité définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\, f(x-t)\,\mathrm{d}t$, et par le même raisonnement qu'à la question précédente, $f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x f_n(t) \times f(x-t)\,\mathrm{d}t$ si $x \geqslant 0$ et 0 sinon.

   Soit $x \geqslant 0$: $f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x a^n\,\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{e}^{-a\,t} \times a\,\mathrm{e}^{-a\,(x-t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^x a^{n+1}\,\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{e}^{-a\,x}\,\mathrm{d}t = a^{n+1}\,\mathrm{e}^{-a\,x}\left[\frac{t^n}{n!}\right]_0^x =$ $a^{n+1}\,\mathrm{e}^{-a\,x} \times \dfrac{x^n}{n!}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{f_n(x) = a^n\,\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{e}^{-a\,x} \text{ si } x \geqslant 0 \text{ et } 0 \text{ si } x < 0}$$

Partie II

1. (a) Si $u < 0$, $F_2(u) = 0$ (le temps d'attente est nécessairement positif).

   (b) W_1 et Δ_2 sont indépendantes, donc une densité du couple est égale au produit des densités :
   $f(w,t) = a\,b\,\mathrm{e}^{-(a\,w + b\,t)}$ si $(w,t) \in \big(\mathbb{R}^+\big)^2$ et 0 sinon.

   (c) Le temps d'attente est nul si le premier client par avant l'arrivée du deuxième, c'est à dire $T_1 + W_1 \leqslant T_2$ ou encore $W_1 \leqslant T_2 - T_1 = \Delta_2$.

   (d) $P\big(W_1 \leqslant \Delta_2\big) = \displaystyle\int_{t=0}^{+\infty}\int_{w=0}^{t} a\,b\,\mathrm{e}^{-(a\,w+b\,t)}\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{+\infty} b\,\mathrm{e}^{-b\,t}\left[-\,\mathrm{e}^{-a\,w}\right]_0^t\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{+\infty} b\big(\mathrm{e}^{-b\,t} - \mathrm{e}^{-(a+b)\,t}\big)\,\mathrm{d}t$

   $P\big(W_1 \leqslant \Delta_2\big) = \left[-\,\mathrm{e}^{-b\,t} + \dfrac{b}{a+b}\,\mathrm{e}^{-(a+b)\,t}\right]_0^{+\infty} = 1 - \dfrac{b}{a+b} = \dfrac{a}{a+b}$.

   $F_2(0) = P\big(U_2 \leqslant 0\big) = P\big(U_2 < 0\big) + P\big(U_2 = 0\big) = 0 + \dfrac{a}{a+b}$

   (e) $\big[U_2 \leqslant u\big] = \big[U_2 < 0\big] \cup \big[U_2 = 0\big] \cup \big[0 < U_2 \leqslant u\big]$; or $\big[U_2 < 0\big] = \emptyset$, donc $\big[U_2 \leqslant u\big] = \big[U_2 = 0\big] \cup \big[0 < U_2 \leqslant u\big]$

   Si $U_2(\omega) > 0$ alors $U_2(\omega) = W_1(\omega) - \Delta_2(\omega)$, donc $P\big(0 < U_2 \leqslant u\big) = P\big(0 < W_1 - \Delta_2 \leqslant u\big)$

   $P\big(0 < W_1 - \Delta_2 \leqslant u\big) = \displaystyle\int_{t=0}^{+\infty}\int_{w=t}^{t+u} a\,b\,\mathrm{e}^{-(a\,w+b\,t)}\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{+\infty} a\,\mathrm{e}^{-a\,t}\left[-\mathrm{e}^{-b\,w}\right]_t^{t+u}\,\mathrm{d}t$

   $= \displaystyle\int_{t=0}^{+\infty} a\,\mathrm{e}^{-(a+b)\,t}\big(1 - \mathrm{e}^{-b\,u}\big)\,\mathrm{d}t = \frac{a}{a+b}\,\big(1 - \mathrm{e}^{-b\,u}\big)$

Finalement, $P\big(U_2 \leqslant u\big) = \dfrac{b}{a+b} + \dfrac{a}{a+b}\left(1 - \mathrm{e}^{-b\,u}\right) = 1 - \dfrac{a}{a+b}\,\mathrm{e}^{-b\,u}$

(f) U_2 n'est pas une variable à densité car $P\big(U_2 = 0\big) = \dfrac{b}{a+b} \neq 0$.

2. (a) Le client numéro $n-1$ arrive à l'instant T_{n-1} et repart à $T_{n-1}+W_{n-1}$ (car W_{n-1} est la durée de présence à la poste de ce client).
   - Donc $U_n(\omega) = 0$ si et seulement si $T_n \geqslant T_{n-1} + W_{n-1}$ (le client numéro n arrive après le départ du client numéro $n-1$), c'est à dire si $\Delta_n = T_n - T_{n-1} > W_{n-1}$.
   - Par conséquent, si $\Delta_n \leqslant W_{n-1}$, alors $U_n > 0$ et le temps d'attente du client numéro n est égal à $T_{n-1} + W_{n-1}$ (départ du client numéro $n-1$) moins l'instant d'arrivée du client n, soit $U_n(\omega) = T_{n-1}(\omega) + W_{n-1}(\omega) - T_n(\omega) = W_{n-1}(\omega) - \Delta_n(\omega)$.

   (b) On montre cette propriété d'indépendance par récurrence sur n :
   - $n = 2$: $W_1 = S_1$ est indépendante de Δ_2 par hypothèse (préliminaires).
   - $n = 3$: $W_2 = S_2 + \max\big(W_1 - \Delta_2, 0\big)$, donc W_2 dépend de S_2, W_1 et Δ_2 donc ne dépend pas de Δ_3.
   - on fait l'hypothèse de récurrence suivante : pour tout $n \geqslant 2$, W_{n-1} dépend de $S_1, \dots, S_{n-1}$, $\Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}$ (donc par indépendance mutuelle des variables S_k et Δ_k, W_{n-1} est indépendante de Δ_n).
     Cette propriété est vérifiée pour $n = 2$ et $n = 3$, supposons la vraie pour une certaine valeur de $n \geqslant 2$: $W_n = S_n + \max\big(W_{n-1} - \Delta_n, 0\big)$ dépend alors de $S_1, \dots, S_{n-1}$, S_n et $\Delta_2, \dots, \Delta_n$, donc **pas** de Δ_{n+1}.

   (c) $W_n = U_n + S_n$ est la somme de deux variables aléatoires à valeurs positives (lois exponentielles) donc $W_n \leqslant S_n$; par conséquent $P\big(W_n \leqslant 0\big) \leqslant P\big(S_n = 0\big) = 0$.
   D'après $\mathcal{R}_1$, G_n, la fonction de répartition de W_n est continue sur $[0, +\infty[$ (donc aussi en 0) ; d'autre part G_n est la fonction nulle sur $]-\infty, 0[$ (donc continue et de classe $\mathscr{C}^1$ sur cet intervalle). Ainsi G_n est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$, donc il faudrait supposer également que G_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. On a alors toutes les propriétés qui caractérisent la fonction de répartition d'une variable à densité.

   (d) W_{n-1} et Δ_n sont indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, donc l'événement $\big[W_{n-1} - \Delta_n \leqslant 0\big]$ s'étudie de la même façon que $\big[W_1 - \Delta_2 \leqslant 0\big]$ (question 1d) : $P\big(W_{n-1} \leqslant \Delta_n\big) = \displaystyle\int_{t=0}^{+\infty}\int_{w=0}^{t} a\,\mathrm{e}^{-a\,t}\,\varphi_{n-1}(w)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}t$.

   (e) $\big[U_n = 0\big] = \big[W_1 - \Delta_2 \leqslant 0\big] = \displaystyle\int_{t=0}^{+\infty} a\,\mathrm{e}^{-a\,t}\big[G_{n-1}(w)\big]_0^t\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{+\infty} a\,\mathrm{e}^{-a\,t} G_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t$ (puisque $G_{n-1}(0) = 0$).

   (f) De même qu'à la question 1e, on a $\big[U_n \leqslant u\big] = \big[U_n = 0\big] \cup \big[0 < [W_{n-1} - \Delta_n \leqslant u\big]$ (réunion disjointe), donc :
   $$P\big(0 < W_n{-}1 - \Delta_n \leqslant u\big) = \int_{t=0}^{+\infty}\int_{w=t}^{t+u} a\,\mathrm{e}^{-a\,t}\,\varphi_{n-1}(w)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{+\infty} a\,\mathrm{e}^{-a\,t}\big[G_{n-1}(w)\big]_t^{t+u}\,\mathrm{d}t$$
   $$= \int_{t=0}^{+\infty} a\,\mathrm{e}^{-a\,t}\Big(G_{n-1}(t+u) - G_{n-1}(t)\Big)\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{+\infty} a\,\mathrm{e}^{-a\,t}\,G_{n-1}(t+u)\,\mathrm{d}t - \underbrace{\int_{t=0}^{+\infty} a\,\mathrm{e}^{-a\,t}\,G_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t}_{P(U_n=0)}.$$
   Finalement, $F_n(u) = P\big(U_n \leqslant u\big) = P\big(U_n = 0\big) + P\big(0 < W_n{-}1 - \Delta_n \leqslant u\big) = \displaystyle\int_{t=0}^{+\infty} a\,\mathrm{e}^{-a\,t}\,G_{n-1}(t+u)\,\mathrm{d}t$.

3. Pour $u \geqslant 0, F_2(u) = \displaystyle\int_0^{+\infty} a\,\mathrm{e}^{-a\,t}\left(1 - \mathrm{e}^{-(b-a)\,(u+t)}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\left(a\,\mathrm{e}^{-a\,t} - a\,\mathrm{e}^{-b\,t}\,\mathrm{e}^{-(b-a)\,u}\right)\mathrm{d}t = 1 - \frac{a}{b}\,\mathrm{e}^{-(b-a)\,u}$

   De même, pour $u \geqslant 0, G_2(u) = \displaystyle\int_0^{+\infty} b\,\mathrm{e}^{-b\,t}\left(1 - \frac{a}{b}\,\mathrm{e}^{-(b-a)\,(u-t)}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\left(b\,\mathrm{e}^{-b\,t} - a\,\mathrm{e}^{-(b-a)\,u}\,\mathrm{e}^{-a\,t}\right)\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-(b-a)\,u}$.

   On remarque que $G_2 = G_1$. Par conséquent, F_3 se calcule à partir de G_2 comme F_2 à partir de G_1, donc $F_3 = F_2$, et ainsi de suite. On montre alors que si $(F_n, G_n) = (F_{n-1}, G_{n-1})$ pour une certaine valeur de n, alors $(F_{n+1}, G_{n+1}) = (F_n, G_n)$, d'où le résultat par récurrence sur n.