Corrigé du devoir n^o 6

Modèles avec réponse discrète

1. Y suit une loi de Bernoulli, et $P(Y=1)=P(X\leqslant\alpha)=F(\alpha)$ donc $Y\hookrightarrow\mathscr{B}\big(F(\alpha)\big)$; donc

$$\boxed{Y\hookrightarrow\mathscr{B}\big(F(\alpha)\big),\ E(Y)=F(\alpha),\ V(Y)=F(\alpha)\,\big(1-F(\alpha)\big)}$$

2. (a) Les individus réagissent de façon indépendante les uns des autres, suivant la même loi, donc N suit une loi binômiale.

$$\boxed{N\hookrightarrow\mathscr{B}\big(n,F(\alpha)\big),\ E(N)=n\,F(\alpha),\ V(N)=n\,F(\alpha)\,\big(1-F(\alpha)\big)}$$

   (b) Par linéarité de l'espérance, on $E\left(\dfrac{N}{n}\right)=\dfrac{1}{n}\,E(N)=F(\alpha)=\theta$, de plus $V\left(\dfrac{N}{n}\right)=V(N)=\dfrac{F(\alpha)\,\big(1-F(\alpha)\big)}{n}$

   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}V\left(\dfrac{N}{n}\right)=0$; on peut dire que $\boxed{\dfrac{N}{n}\text{ est un estimateur sans biais de }\theta}$

3. (a) $E(Y)=\theta=F(\alpha)$; or $F(\alpha)=P(X\leqslant\alpha)=P\left(\dfrac{X-m}{\sigma}\leqslant\dfrac{\alpha-m}{\sigma}\right)=\Phi\left(\dfrac{\alpha-m}{\sigma}\right)$ car $\dfrac{X-m}{\sigma}\hookrightarrow\mathscr{N}(0,1)$.

   (b) Pour m et α donnés, $\lim\limits_{\sigma\to+\infty}\dfrac{\alpha-m}{\sigma}=0$ donc $\lim\limits_{\sigma\to+\infty}\theta=\Phi(0)=\dfrac{1}{2}$.

4. (a) F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, strictement croissante ($F'(y)=\dfrac{\mathrm{e}^{-y}}{(1+\mathrm{e}^{-y})^2}>0$) ; $\lim\limits_{y\to\infty}F(y)=0$ et $\lim\limits_{y\to+\infty}F(y)=1$.
   Donc F est la fonction de répartition d'une variable à densité.

   (b) $E(Y)=\theta=P(X\leqslant\alpha)=F(\alpha)=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-\alpha}}$.

   (c) i. Une densité de Z est donnée par $F'(x)$, soit $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$.

   ii. La courbe de F admet le point $I\Big(0\,,\dfrac{1}{2}\Big)$ comme centre de symétrie si et seulement si le bipoint $M\,M'$ où $M\big(x,F(x)\big)$ et $M'\big(-x,F(-x)\big)$ a pour milieu le point I c'est à dire si $\dfrac{F(x)+F(-x)}{2}=\dfrac{1}{2}$ $(\star)$.
   On vérifie que $F(-x)+F(x)=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{x}}+\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}=1$, donc la courbe de F admet bien le point I comme centre de symétrie.
   La courbe de f admet la droite d'éuation $x=a$ comme axe de symétrie si et seulement s'il existe un réel a tel que $\forall x\in\mathbb{R},\ f(a+x)=f(a-x)$. Or $f(-x)=\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{(1+\mathrm{e}^{x})^2}=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$ (en multipliant numérateur et dénominateur par e^{-2x}). Donc f est paire ($a=0$) et l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de sa courbe représentative.
   Remarque : ce résultat peut également être obtenu à partir de la relation $(\star)$ précédemment trouvée : $F(-x)+F(x)=1$ donne par dérivation $-f(-x)+f(x)=0$.
   f est deux fois dérivable et par parité de f, f'' est également paire, donc si la courbe de f admet un point d'inflexion d'abscisse x_0, le point d'abscisse $-x_0$ est aussi un point d'inflexion.

$$F''(x)=\frac{-\mathrm{e}^{-x}\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)^2-\mathrm{e}^{-x}\times\big(-2\,\mathrm{e}^{-x}\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)\big)}{\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)^4}=\frac{\mathrm{e}^{-x}\left(-1-\mathrm{e}^{-x}+2\,\mathrm{e}^{-x}\right)}{\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)^3}=\frac{\mathrm{e}^{-2x}-\mathrm{e}^{-x}}{\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)^3}.$$

   Enfin, $F'''(x)=f''(x)=\dfrac{(-2\,\mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^{-x})\,(1+\mathrm{e}^{-x})+3\,\mathrm{e}^{-x}\,(\mathrm{e}^{-2x}-\mathrm{e}^{-x})}{\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)^4}=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{-2x}-4\,\mathrm{e}^{-x}+1\right)}{\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)^4}$

   f'' est du signe de $\left(\mathrm{e}^{-2x}-4\,\mathrm{e}^{-x}+1\right)$, et en posant $X=\mathrm{e}^{-x}$, on obtient :
   $X^2-4\,X+1=(X-2-\sqrt{3})\,(X-2+\sqrt{3})$; donc $\mathrm{e}^{-2x}-4\,\mathrm{e}^{-x}+1=(\mathrm{e}^{-x}-2-\sqrt{3})\,(\mathrm{e}^{-x}-2+\sqrt{3})$.
   f'' s'annule en changeant de signe pour $x=\ln(2-\sqrt{3})$ et $x=\ln(2+\sqrt{3})$; ce sont donc les abscisses des deux points d'inflexion de la courbe de f.
   Remarque : $2-\sqrt{3}=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$ donc $\ln(2-\sqrt{3})=-\ln(2+\sqrt{3})$.

iii. Z admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument.

Soient $(A,B)\in\mathbb{R}^2, A<B$: $\displaystyle\int_A^B t\,f(t)\,\mathrm{d}t = \int_A^B \frac{t\,\mathrm{e}^{-t}}{\left(1+\mathrm{e}^{-t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$ Par le changement de variable $u=\mathrm{e}^t$, on obtient $\displaystyle\int_A^B \frac{t\,\mathrm{e}^{-t}}{\left(1+\mathrm{e}^{-t}\right)^2}\,\mathrm{d}t = \int_{\mathrm{e}^A}^{\mathrm{e}^B} \frac{\ln u}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u$, puis en intégrant par partie :

$\displaystyle\int_A^B t\,f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-\ln u}{(1+u)}\right]_{\mathrm{e}^A}^{\mathrm{e}^B} + \int_{\mathrm{e}^A}^{\mathrm{e}^B} \frac{1}{u\,(1+u)}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{-\ln u}{(1+u)} + \ln\left(\frac{u}{1+u}\right)\right]_{\mathrm{e}^A}^{\mathrm{e}^B} = \frac{A}{1+\mathrm{e}^A} - \frac{B}{1+\mathrm{e}^B} + \ln\left(\frac{\mathrm{e}^B}{1+\mathrm{e}^B}\right) - \ln\left(\frac{\mathrm{e}^A}{1+\mathrm{e}^A}\right) = \frac{-A\,\mathrm{e}^A}{1+\mathrm{e}^A} + \ln\left(1+\mathrm{e}^A\right) - \frac{B}{1+\mathrm{e}^B} + \ln\left(\frac{\mathrm{e}^B}{1+\mathrm{e}^B}\right).$

$\displaystyle\lim_{A\to-\infty} \frac{A\,\mathrm{e}^A}{1+\mathrm{e}^A} = \lim_{A\to-\infty} \ln\left(1+\mathrm{e}^A\right) = 0$; $\displaystyle\lim_{B\to+\infty} \ln\left(\frac{\mathrm{e}^B}{1+\mathrm{e}^B}\right) = \lim_{B\to+\infty} \frac{B}{1+\mathrm{e}^B} = 0$, donc $E(Z)=0$.

(d) Notons $V = \ln\left(\dfrac{U}{1-U}\right)$ et étudions les variations de la fonction $f : x \mapsto \left(\dfrac{x}{1-x}\right)$ sur $]0\,,1[$:

f est dérivable et $\forall x \in]0\,,1[\ f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2} > 0$ donc f est croissante. $\displaystyle\lim_{x\to0^+} f(x) = 0$; $\displaystyle\lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty$ donc f réalise une bijection strictement croissante de $]0\,,1[$ vers $]0\,,+\infty[$ et par composition par ln, $x \mapsto \ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$ est bijective de $]0\,,1[$ vers $\mathbb{R}$. Ainsi l'univers image de V est $\mathbb{R}$.

Soit $t\in\mathbb{R}$: $\Big[V \leqslant t\Big] = \left[\dfrac{U}{1-U} \leqslant \mathrm{e}^t\right] = \left[U \leqslant \left(1-U\right)\mathrm{e}^t\right]$ car $1-U>0$.

Donc $P\Big(V\leqslant t\Big) = P\left(U \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}\right) = P\left(U \leqslant \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-t}}\right) = F_U\left(\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-t}}\right)$.

$\forall t\in\mathbb{R},\ 0 < \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-t}} < 1$ donc $F_U\left(\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-t}}\right) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-t}}$. On reconnait la fonction F définie à la question 4a donc V suit une loi logistique.

Règles de décisions stochastiques : le modèle de Luce

1. La probabilité de choisir l'action a au sein de l'ensemble T est égale à la probabilité de sélectionner le sous-ensemble d'actions S, puis sachant qu'on a sélectionné ce sous-ensemble, la probabilité de choisir l'action a parmi les actions qui composent S.

2. (a) $P_T(S) = \displaystyle\sum_{a\in S} P_T(a)$, et puisque le système de probabilités P_S vérifie (*), pour tout $a\in S, P_S(a) = \dfrac{P_T(a)}{P_T(s)}$.

   Or $P_T(S) = \displaystyle\sum_{a\in S} P_T(a) = \sum_{b\in S} P_T(b)$ (indice muet) donc $P_S(a) = \dfrac{P_T(a)}{\displaystyle\sum_{b\in S} P_S(b)} = \dfrac{k\,P_T(a)}{\displaystyle\sum_{b\in S} k\,P_S(b)} = \dfrac{v(a)}{\displaystyle\sum_{b\in S} v(b)}$

   (b) Soit w une fonction défi,nie sur A satisfaisant (1), alors $\forall a\in A, P_A(a) = \dfrac{w(a)}{\displaystyle\sum_{b\in A} w(b)} = \dfrac{v(a)}{\displaystyle\sum_{b\in A} v(b)}$ donc

   $v(a) = k\,P_A(a) = \dfrac{k\,w(a)}{\displaystyle\sum_{b\in A} w(b)}$. Le terme $\mu = \dfrac{k}{\displaystyle\sum_{b\in A} w(b)}$ ne dépend pas de a, on a donc bien $w = \mu\cdot v$.

3. Réciproquement, si pour tout $S\in\mathcal{F}$ et tout $a\in A$, $Q_S(a) = \dfrac{v(a)}{\displaystyle\sum_{b\in S} v(b)}$, alors si $(S,T)\in\mathcal{F}^2$ tels que

$$S\subset T,\quad Q_T(a) = \frac{v(a)}{\displaystyle\sum_{b\in T} v(b)} = \frac{v(a)}{\displaystyle\sum_{b\in S} v(b)} \times \frac{\displaystyle\sum_{b\in S} v(b)}{\displaystyle\sum_{b\in T} v(b)} = Q_S(a)\times Q_T(S) \text{ donc } \left(Q_S\right)_{S\in\mathcal{F}} \text{ vérifie } (*).$$

4. (a) Soit v une utilité associée au système de probabilités (P_S), on a vu qu'il existe une constante $k > 0$ tel que $\forall a \in A,\ v(a) = k\, P_A(a)$ où k ne dépend pas de a. Donc si $v(a) \leqslant v(b)$, en multipliant par k, on obtient $P_S(a) \leqslant P_S(b)$.

   (b) En prenant pour ρ la fonction logarithme népérien, on obtient
   $v(a) = \mathrm{e}^{\rho(a)}$ et $P(a,b) = P_{\{a,b\}}(a) = \dfrac{v(a)}{v(a)+v(b)} = \dfrac{\mathrm{e}^{\rho(a)}}{\mathrm{e}^{\rho(a)}+\mathrm{e}^{\rho(b)}} = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{\rho(b)-\rho(a)}}$

   (c) On reconnait la fonction de répartition de la loi logistique au point $\rho(a)-\rho(b)$, il suffit donc de considérer $\alpha_{a,b} = \rho(a) - \rho(b) = \ln\left(\dfrac{a}{b}\right)$.

5. (a) Puisque $\big(P_S\big)_{S\in\mathcal{F}}$ satisfait à l'hypothèse $(*)$, on a : $P_T(a) = P_F(S) \times P_S(a),\ \ P_T(b) = P_F(S) \times P_S(b)$ donc par quotient, $\dfrac{P_T(a)}{P_T(b)} = \dfrac{P_S(a)}{P_S(b)}$.

   (b) D'après la question précédente, $\dfrac{P_A(R)}{P_A(V)} = \dfrac{P_{R,V}(R)}{P_{R,V}(V)} = 1$ donc $P_A(R) = P_A(V) = P_A(B)$; de plus $P_A(R)+P_A(V)+P_A(B) = 1$ donc $P_A(V) = \dfrac{1}{3}$.

   Compte tenu que le choix Bus/Voiture est équiprobable, on s'attendrait plutôt à avoir $P_A(V) = \dfrac{1}{2}$.

Utilités aléatoires

1. Soit $t \in \mathbb{R}$, $\big[U \leqslant t\big] = \big[U_1 \leqslant t\big] \cap \cdots \cap \big[U_n \leqslant t\big]$, donc $P\big(U \leqslant t\big) = P\Big(\big(U_1 \leqslant t\big) \cap \cdots \cap \big(U_n \leqslant t\big)\Big)$.
   Les variables $U_1, \ldots, U_n$ sont mutuellement indépendantes donc les événements $\big(U_1 \leqslant t\big), \ldots, \big(U_n \leqslant t\big)$ le sont ; ainsi $P\big(U \leqslant t\big) = G_n(t) = P\big(U_1 \leqslant t\big) \times \cdots \times P\big(U_n \leqslant t\big) = \Big(F(t)\Big)^n$.

   $$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ G_n(t) = \Big(F(t)\Big)^n}$$

2. (a) F est une fonction de répartition donc $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) \in]0\,,1[$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \Big(F(x)\Big) = 0$.

   (b) $G_n(x) = F(x) \iff F(x) = 0$ ou 1, et comme F est croissante et que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$, Il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $x < a \iff F(x) = 0$ et par conséquent $x \geqslant a \iff F(x) = 1$. Donc si X est une variable aléatoire de fonction de répartition F, alors $P(X = a) = 1$; X est constante (égale à a) avec la probabilité 1. Réciproquement, si X est une variable aléatoire presque sûrement constante, il existe un réel a tel que $P(X = a) = 1$ donc si F est la fonction de répartition de X, on a $x < a \iff F(x) = 0$ et $x \geqslant a \iff F(x) = 1$. F ne prend que les valeurs 0 et 1, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, F^n = F$; d'où $G_n = F$.

3. (a) Si une telle loi existe, alors F est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.
   D'autre part $F' = f,\ f$ est strictement positive par hypothése, donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   (b) Soit $x \in \mathbb{R},\ F$ est strictement croissante donc $0 < F(x) < 1$, par conséquent la suite $\Big(F(x)\Big)^n$ est une suite géométrique de raison $F(x)$, donc strictement décroissante et qui converge vers 0.
   $0 < \Big(F(x)\Big)^n - \Big(F(x)\Big)^{n+1} = F(x+b_n) - F(x+b_{n+1})$. Comme F est bijective croissante, on déduit $0 < (x+b_n) - (x+b_{n+1})$ donc (b_n) est strictement décroissante.

   (c) Soient $(j, j') \in [\![1, n]\!]^2$ distincts, les ensembles d'indices $[\![(j-1)\,N+1, j\,N]\!]$ et $[\![(j'-1)\,N+1, j'\,N]\!]$ sont disjoints donc les $Y_j,\ j \in [\![1, n]\!]$ sont indépendantes.

   (d) Par le même raisonnement qu'à la question 1, Y_j a pour fonction de répartition $x \mapsto \Big(F(x)\Big)^N$

   (e) $\max(Y_1, \ldots Y_n)$ a pour fonction de répartition F^{nN} et puisque les Y_j ont même loi de fonction de répartition F^n et sont indépendantes, $\exists b_N \leqslant 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x)^{nN} = F^n(x+b_N)$. En substituant dans l'expression de F^n on obtient alors $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x)^{nN} = F(x+b_n+b_N)$.
   En raisonnant à présent avec $\max(U_1, \ldots U_n\ )$, on obtient l'existence d'un réel $b_{nN} \leqslant 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x)^{nN} = F^n(x+b_{nN})$.

F est injective (car strictement croissante) donc $\forall x \in \mathbb{R},\ x + b_n + b_N = x + b_{nN}$.
Ces calculs sont valables quels que soient les entiers n et N strictement positifs, d'où la conclusion annoncée.

(f) En choisissant $N = n$, on obtient la relation : $b_{n\times n} = b_{n^2} = 2\,b_n$, puis par récurrence sur k, $b_{n^k} = k\,b_n$; (la propriété est évidente pour $k = 1$ et $k = 0$).

(g) La suite $\left(\dfrac{p^m}{2^k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0 donc il existe un entier k_m au delà duquel $\dfrac{p^m}{2^k} < 1$, c'est à dire en particulier $\dfrac{p^m}{2^{k_m}} \geqslant 1$ et $\dfrac{p^m}{2^{k_m+1}} < 1$. D'où l'encadrement demandé.
Remarque : on peut aussi considérer le logarithme en base 2 de p^m, et prendre pour k_m sa partie entière : $p \geqslant 1$ donc $p^m \geqslant 1$ et $\log_2(p^m) \geqslant 0$. Ainsi $k_m = E\left(\log_2(p^m)\right) \in \mathbb{N}$ vérifie bien $k_m \leqslant \log_2(p^m) < k_m + 1$, d'où $2^{k_m} \leqslant p^m < 2^{k_m+1}$.
La fonction ln est croissante donc $\ln\left(2^{k_m}\right) = k_m \ln 2 \leqslant m \ln p < (k_m+1)\ln 2$, et comme $\ln 2$ et m sont positifs, $\dfrac{k_m}{m} \leqslant \dfrac{\ln p}{\ln 2} < \dfrac{k_m+1}{m}$.
Finalement $\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{\ln p}{\ln 2} - \dfrac{1}{m} < \dfrac{k_m}{m} \leqslant \dfrac{\ln p}{\ln 2}$ d'où $\lim\limits_{m\to+\infty} \dfrac{k_m}{m} = \dfrac{\ln p}{\ln 2}$.
Remarque : $\dfrac{\ln p}{\ln 2} = \log_2(p)$, donc la limite de $\dfrac{k_m}{m}$ pouvait être obtenue en remarquant que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{E(x)}{x} = 1$.

(h) Soit $m \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire $b_p = \dfrac{b_{p^m}}{m}$, et par décroissance de la suite (b_n), $\dfrac{b_{2^{k_m+1}}}{m} < b_p \leqslant \dfrac{b_{2^{k_m}}}{m}$.
Or $b_{2^{k_m}} = k_m\,b_2,\ b_{2^{k_m+1}} = (k_m+1)\,b_2$, donc $\dfrac{(k_m+1)\,b_2}{m} < b_p \leqslant \dfrac{k_m\,b_2}{m}$.
Cet encadrement est vrai pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ donc par passage à la limite lorque m tend vers $+\infty$, on obtient $b_p = \dfrac{\ln p}{\ln 2}\,b_2$

$$\boxed{\gamma = \frac{b_2}{\ln 2} \text{ et } \forall p \in \mathbb{N}^*,\ b_p = \gamma\,\ln p}$$

(i) La fonction $F : x \mapsto \exp\left(-\,\mathrm{e}^{-x}\right)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, strictement croissante, $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.
$\Big(F(x)\Big)^n = \exp\left(-n\,\mathrm{e}^{-x}\right) = \exp\left(-\,\mathrm{e}^{-(x-\ln n)}\right)$, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = -\ln n$, d'où $\gamma = -1$; $\gamma < 0$ ce qui est logique puisque la suite (b_n) est décroissante.

4. (a) Une densité f de X est donnée par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^{-x} \exp\left(-\,\mathrm{e}^{-x}\right) = \mathrm{e}^{-x}\,F(x)$

(b) Z est à valeurs dans $]0, +\infty[$ donc $\forall t > 0, P(Z \leqslant t) = 0$ et pour $t \geqslant 0, [Z \leqslant t] = [X \geqslant -\ln t]$ donc $P(Z \leqslant t) = 1 - F(-\ln t) = 1 - \exp\left(-\,\mathrm{e}^{\ln t}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-t}$.

$$\boxed{Z \text{ suit une loi exponentielle de paramètre } 1}$$

(c) $x + y > x$ et $-\ln$ est décroissante, donc l'événement $[X \leqslant -\ln(x+y)]$ est inclus dans $[X \leqslant -\ln x]$; ainsi $P_{[X\leqslant -\ln x]}\big(X \leqslant -\ln(x+y)\big) = \dfrac{P\big(X \leqslant -\ln(x+y)\big)}{P\big(X \leqslant -\ln x\big)} = \dfrac{\mathrm{e}^{-(x+y)}}{\mathrm{e}^{-x}} = \mathrm{e}^{-y} = P\big(X \leqslant -\ln y\big)$

(d) Soient $0 < a < b$, $[a \leqslant W \leqslant b] = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty} \Big(\underbrace{[L = k] \cap \big[a \leqslant \max(Y_1, \ldots, Y_k) \leqslant b\big]}_{\text{réunion disjointe}}\Big)$. Les variables $L, Y_1, \ldots, Y_n, \ldots$ sont indépendantes donc $P\Big(a \leqslant W \leqslant b\Big) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P\big(L = k\big) \times P\Big(\big(a \leqslant \max(Y_1, \ldots, Y_k) \leqslant b\Big) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-1}}{k!}\big(F^k(b) - F^k(a)\big) = \mathrm{e}^{-1}\left(\left(\mathrm{e}^{F(b)} - 1\right) - \left(\mathrm{e}^{F(a)} - 1\right)\right)$ où F est la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1.
Finalement, $P\Big(a \leqslant W \leqslant b\Big) = \mathrm{e}^{-1}\left(\mathrm{e}^{1-\mathrm{e}^{-b}} - \mathrm{e}^{1-\mathrm{e}^{-a}}\right) = \exp\left(-\,\mathrm{e}^{-b}\right) - \exp\left(-\,\mathrm{e}^{-a}\right) = P\Big(a \leqslant X \leqslant b\Big)$
$P(W = 0) = P(L = 0) = \mathrm{e}^{-1}$; on peut retrouver ce résultat en remarquant que $[W = 0] = [X \leqslant 0]$ donc $P(W = 0) = P(X \leqslant 0) = \exp\Big(-\,\mathrm{e}^{-0}\Big)$.