MATHÉMATIQUES
Devoir surveillé n°5
Durée : 3 heures 30

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

PREMIER PROBLEME - Matrices stochastiques

Les trois parties du problème sont indépendantes.

On désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels ou le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
Dans tout le problème, on considère l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ (où $n \geq 2$) rapporté à sa base canonique, notée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$. On note v_1 le vecteur de $\mathbb{K}^n$ dont les composantes dans la base $\mathcal{B}$ sont toutes égales à 1.
On rappelle que deux sous-espaces vectoriels F et G sont dits supplémentaires dans $\mathbb{K}^n$, ce que l'on note $\mathbb{K}^n = F \oplus G$, si tout vecteur $x \in \mathbb{K}^n$ peut s'écrire d'une manière et d'une seule sous la forme $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$. L'application $p : x \mapsto y$ est alors un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ appelé projecteur sur F de direction G.
Enfin, l'application identique de $\mathbb{K}^n$ est notée Id.

On se propose d'étudier l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des matrices stochastiques d'ordre n, c'est-à-dire des éléments $M = (m_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les cœfficients sont positifs ou nuls et tels que, pour tout nombre entier i appartenant à $[\![1, n]\!]$:

$$m_{i1} + m_{i2} + \ldots + m_{in} = 1$$

(Ces matrices jouent un rôle important, notamment en calcul des probabilités).

PARTIE I : Un premier exemple

On considère des nombres réels a et b appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ et tels que $a + b = 1$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice stochastique

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{bmatrix}$$

1. (a) Déterminer à quelle condition un vecteur $v = (x, y, z)$ appartient au noyau de $f - \mathrm{Id}$; expliciter une base (v_1) de ce sous-espace vectoriel.

(b) Montrer que (e_2, e_3) est une base de l'image de $f - \mathrm{Id}$.

(c) Établir que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id})$.

(d) Soit p le projecteur sur le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id})$ de direction $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id})$. Déterminer $p(v_1)$, puis $p(e_3)$, $p(e_2)$ et $p(e_1)$. Expliciter la matrice P associée à p dans la base $\mathcal{B}$.

2. Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

3. On considère la base $\mathcal{B}' = (v_1, e_2, e_3)$.

(a) Déterminer la matrice M' associée à f dans la base $\mathcal{B}'$.

(b) Pour tout entier naturel non nul k, calculer par récurrence $\left(M'\right)^k$.

(c) Déterminer la matrice de passage C de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Calculer son inverse.

(d) Déduire de ces résultats l'expression de la matrice M^k, ainsi que sa limite lorsque k tend vers $+\infty$ (c'est-à-dire la matrice dont tous les coefficients sont les limites des coefficients de M^k). Comparer cette limite à la matrice P obtenue dans la question 1.

PARTIE II : Un second exemple

Dans cette partie, on suppose que $n \geq 3$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est la matrice stochastique :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{n-1} & \cdots & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & \cdots & \cdots & \frac{1}{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

1. (a) Déterminer une base du noyau de $f - \mathrm{Id}$.

(b) Démontrer que $(e_1 - e_2, e_1 - e_3, \ldots, e_1 - e_n)$ est une famille libre d'éléments de $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id})$, puis établir que c'est une base de cet espace.

(c) Prouver que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id})$.

(d) Soit p le projecteur sur le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id})$ de direction $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id})$. Déterminer $p(v_1)$ puis $p(e_1)$, $p(e_2)$, ..., $p(e_n)$. Expliciter la matrice P associée à p dans la base $\mathcal{B}$.

(e) Soit q le projecteur sur le sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id})$ de direction $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id})$. Etablir que $p + q = \mathrm{Id}$ et que $p \circ q = q \circ p = 0$. Expliciter la matrice Q associée à q dans la base $\mathcal{B}$.

2. Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

3. Exprimer M comme combinaison linéaire de P et Q. En déduire l'expression de la matrice M^k, ainsi que sa limite lorsque k tend vers $+\infty$ en fonction des matrices P et Q. (On rappelle que la limite de la matrice M^k est la matrice dont tous les coefficients sont les limites des coefficients de M^k). Exprimer de même l'inverse de M en fonction de P et Q.

PARTIE III : Etude du cas général

1. Soit V_1 la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

(a) Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à coefficients réels positifs ou nuls. Démontrer que M est stochastique si et seulement si $M\,V_1 = V_1$.

(b) En déduire que, pour tout couple (A, B) d'éléments de S_n, le produit $A\,B$ appartient encore à S_n, de même que les puissances A^k et B^k pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Dans la suite, on désigne par f un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont la matrice $M = (m_{ij})$ dans la base $\mathcal{B}$ est stochastique. Pour tout vecteur $x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$, on convient de noter :

$$\| x \| = \max\left(|\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_n|\right)$$

On remarquera que, si x et x' sont deux éléments de $\mathbb{C}^n$, on a :

$$\| x + x' \| \leq \| x \| + \| x' \|$$

2. (a) Établir que pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, on a : $\| f(x) \| \leq \| x \|$.

(b) En déduire que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de f, alors $|\lambda| \leq 1$.

(c) Démontrer que 1 est une valeur propre de f.

3. (a) Soit $y \in \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id})$.

i. Démontrer qu'il existe $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $y = f(x) - x$.

ii. Exprimer alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k(x)$ en fonction de k, x et y.

iii. Déduire de la question **2**.(a) que $k \| y \| \leq 2 \| x \|$ puis prouver que $y = 0$.

(b) Déduire des questions précédentes que $\mathbb{C}^n = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id})$.

(c) Démontrer que, pour tout élément $x \in \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id})$, $f(x)$ appartient à $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id})$.

(d) Établir que tout sous-espace propre de f associé à une valeur propre autre que 1 est inclus dans $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id})$.

SECOND PROBLEME : Analyse

Un des buts de ce problème est de prouver la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du$ et d'en donner la valeur. Cette intégrale dite intégrale de Gauss intervient dans de nombreux problèmes de probabilités.

Préliminaire

Préciser la limite au voisinage de $+\infty$, de $u \mapsto u^2\,e^{-u^2}$.*(Indiquer clairement le théorème utilisé)*

En déduire la nature de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du$.

Intégrale de Gauss

Dans ce problème, L et M désignent les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$L(x) = \int_0^x e^{-u^2}\,du \quad \text{et} \quad M(x) = \int_0^1 \frac{e^{-\left(t^2+1\right)x^2}}{t^2+1}\,dt \quad \text{et} \quad N(x) = \int_0^1 -2x\,e^{-\left(t^2+1\right)x^2}\,dt$$

1. Démontrer que, pour tout x réel positif :

$$0 \leq L(x) \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{4}\, e^{-2x^2} \leq M(x) \leq \frac{\pi}{4}\, e^{-x^2}$$

2. Soit m_t la fonction définie par : $m_t(x) = \dfrac{e^{-\left(t^2+1\right)x^2}}{t^2+1}$, t étant un réel de l'intervalle $[0,1]$.

(a) Déterminer les variations de la fonction $g : x \mapsto x^2 e^{-x^2}$.
Préciser sa valeur maximale K sur $\mathbb{R}^+$.

(b) Justifier l'existence pour tout réel positif x de $N(x)$.
Prouver pour tout x réel positif : $N(x) = -2L'(x).L(x)$.

(c) Montrer que m_t est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall t \in [0,1]\,,\ \left|m_t''(x)\right| \leq 4K + 2$$

(d) Démontrer que pour tout couple (x, x_0) de réels positifs distincts et pour tout $t \in [0,1]$, il existe c strictement compris entre x et x_0 tel que

$$\frac{m_t(x) - m_t(x_0)}{x - x_0} - m_t'(x_0) = \frac{1}{2}(x - x_0)\ m_t''(c)$$

En déduire l'existence du constante C telle que

$$\forall (x, x_0) \in \mathbb{R}^{+2},\ \left|\frac{M(x) - M(x_0)}{x - x_0} - N(x_0)\right| \leq C \times |x - x_0|$$

(e) En déduire que pour tout x_0 positif

$$M'(x_0) = N(x_0)$$

3. Considérons les résultats obtenus en (1), $(2b)$ et $(2e)$.

(a) Calculer $M(0)$; puis définir M en fonction de L.

(b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} M(x)$.

(c) En déduire la valeur de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\, \mathrm{d}u$.