MATHÉMATIQUES
Devoir surveillé n°4
Durée : 3 heures 30

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

PROBLEME N°1

Première partie

On considère la matrice A définie par :

$$A = \frac{1}{3}M \quad \text{où} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Nous noterons } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé canoniquement à la matrice M.

1. Discuter selon les valeurs de λ le rang de la matrice $M - \lambda I$.
2. En déduire que M admet exactement 3 valeurs propres distinctes dont vous préciserez les valeurs λ_1, λ_2, λ_3 classées par ordre croissant.
3. Déterminer
   - un vecteur $\overrightarrow{u_1} = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ non nul à coordonnées entières tel que : $f(\overrightarrow{u_1}) = \lambda_1 \overrightarrow{u_1}$.
   - un vecteur $\overrightarrow{u_2} = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ non nul à coordonnées entières tel que : $f(\overrightarrow{u_2}) = \lambda_2 \overrightarrow{u_2}$.
   - un vecteur $\overrightarrow{u_3} = (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ non nul à coordonnées entières tel que : $f(\overrightarrow{u_3}) = \lambda_3 \overrightarrow{u_3}$.
4. Justifier que la famille $\mathcal{B} = \langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3} \rangle$ est base de $\mathbb{R}^3$. Préciser la matrice Δ de f relativement à cette base.
5. Expliciter la matrice P de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}$ et calculer son inverse P^{-1}.
6. En déduire $A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{2}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)^n & \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)^n & 0 \\ \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)^n & \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)^n & 0 \\ 1 - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)^n & 1 - \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)^n & 1 \end{pmatrix}$

Seconde partie

On effectue des tirages dans trois urnes :

- Une urne **blanche** contenant 2 boules **vertes** et 1 boule **noire**.
- Une urne **noire** contenant 2 boules **blanches** et 1 boule **noire**.
- Une urne **verte** contenant 3 boules **vertes**.

Pour le premier tirage, on choisit l'urne noire, on y prend une boule, on note sa couleur puis on remet la boule dans l'urne

Le second tirage a lieu dans l'urne ayant la même couleur que la première boule obtenue au premier tirage : on y prend une boule, on note sa couleur puis on remet la boule dans l'urne dont elle provient.

On continue ainsi en suivant le même protocole :

> Le $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage s'effectue dans l'urne de même couleur que la boule obtenue au $n^{\text{ème}}$ tirage, et toute boule tirée est toujours remise dans l'urne dont elle provient.

Pour n entier non nul, on désigne par :

- B_n l'événement : « le $n^{\text{ème}}$ tirage donne une boule blanche ».
- N_n l'événement : « le $n^{\text{ème}}$ tirage donne une boule noire ».
- V_n l'événement : « le $n^{\text{ème}}$ tirage donne une boule verte ».

On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} P(B_n) \\ P(N_n) \\ P(V_n) \end{pmatrix}$

1. Calculer le vecteur X_1 et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_{n+1} = AX_n$.

2. En déduire les valeurs de $P(B_n)$, $P(N_n)$ et $P(V_n)$ en fonction de n et déterminer leurs limites quand n tend vers $+\infty$.

3. Nous désignons par T le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule verte et choisirons par convention que T prend la valeur 0 si aucun tirage ne donne une boule verte. Déterminer la loi de T, son espérance et sa variance .

PROBLEME N°2

Dans ce problème, toutes les variables aléatoires seront définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ et à valeurs dans l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$.

Pour tout couple (A, B) d'événements tels que : $\mathrm{P}(B) \neq 0$, nous noterons :

- $\mathrm{P}_B(A)$: la probabilité sachant B de l'événement A.

Pour tous entiers a et b, nous désignerons par :

- $[\![a, b]\!]$: l'ensemble des nombres entiers k tels que $a \leq k \leq b$.
- $[\![a, +\infty[\![$: l'ensemble des nombres entiers k tels que $a \leq k$.

Pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ et tout réel t pour lequel cela à un sens, nous noterons :

- $\varphi_X(t)$: l'espérance de la variable aléatoire t^X, autrement dit :

$$\boxed{\varphi_X(t) = \mathrm{E}\left(t^X\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X = k)\, t^k}$$

La fonction φ_X est appelée fonction génératrice de la variable aléatoire X.

Nous adopterons la convention habituelle $0^0 = 1$, ce qui permet d'affirmer : $\boldsymbol{\varphi_X(0) = \mathrm{P}(X = 0)}$ **.**
On rappelle que si U et V sont deux variables aléatoires indépendantes d'espérances respectives $\mathrm{E}(U)$ et $\mathrm{E}(V)$, alors leur produit UV admet également une espérance et $\mathrm{E}(UV) = \mathrm{E}(U) \times \mathrm{E}(V)$.

Première partie

1. Soit n un entier naturel quelconque et X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$.

(a) Montrer que φ_X est une fonction polynôme à coefficients réels.
Quel est son degré maximal ? Quelle est la valeur de $\varphi_X(1)$?

(b) Montrer que si φ_X est donnée, la loi de X est entièrement connue.
— Exprimer alors $\mathrm{P}(X = k)$ en fonction de $\varphi_X^{(k)}(0)$.
— Montrer que l'espérance de X vaut : $\mathrm{E}(X) = \varphi'_X(1)$
— Montrer que la variance de X vaut : $\mathrm{V}(X) = \varphi''_X(1) + \varphi'_X(1) - (\varphi'_X(1))^2$.

(c) On suppose dans cette question que X est distribuée selon la Loi Binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.
— Déterminer la fonction génératrice de X.
— Vérifier que $\varphi_X(t)$ peut s'écrire sous la forme $(\alpha + \beta t)^n$.
— En déduire l'espérance et la variance de X.

2. Soient n_1 et n_2 deux entiers naturels quelconques puis X et Y deux variables aléatoires à valeurs respectivement dans $[\![0, n_1]\!]$ et $[\![0, n_2]\!]$.

   (a) Montrer que si X et Y sont indépendantes : $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \times \varphi_Y(t)$.

   (b) On suppose dans cette question que X et Y sont distribuées respectivement selon les Lois Binomiales $\mathscr{B}(n_1, p)$ et $\mathscr{B}(n_2, p)$ et sont indépendantes.
   Montrer en utilisant exclusivement et dans cet ordre les questions 1c, 2a, puis 1c et 1b que $X + Y$ est distribuée selon la Loi Binômiale $\mathscr{B}(n_1 + n_2, p)$.

Deuxième partie

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout entier n, on pose $a_n = \mathrm{P}(X = n)$.
   Montrer que pour tout réel $t \in [-1, 1]$, la série $\sum a_n t^n$ est absolument convergente.
   En déduire que φ_X est au moins définie sur le segment $[-1, 1]$ et donner la valeur de $\varphi_X(1)$.
2. Déterminer $\varphi_X(t)$ pour tout $t \in [-1, 1]$ dans les deux situations suivantes :
   - X est distribuée selon la Loi Géométrique $\mathscr{G}(p)$ où $p \in]0, 1[$.
     Nous rappelons que $\mathscr{G}(p)$ est la Loi Géométrique de support $\mathbb{N}^*$ de paramètre p.
   - X est distribuée selon la Loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ où $\lambda > 0$.

Dans la suite du problème, nous admettrons le résultat suivant généralisant les résultats obtenus en 1b

> Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors la connaissance de $\varphi_X(t)$ pour tout $t \in [-1, 1]$ entraîne la connaissance de la Loi de X
> Plus précisément, φ_X est indéfiniment dérivable sur $]-1, 1[$
> $$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{P}(X = k) = \frac{\varphi_X^{(k)}(0)}{k!}$$

Troisième partie

On étudie la colonisation d'un domaine par une population de plantes d'une espèce déterminée. Chaque plante de cette espèce a au cours de sa vie, X descendants où X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Chaque plante se développe indépendamment des autres.
La génération initiale $\mathcal{G}_0$ est constituée d'une seule plante, et la génération $\mathcal{G}_{n+1}$ est constituée des descendants directs des plantes de la génération $\mathcal{G}_n$.
On note Z_n la variable aléatoire égale à l'effectif de la génération $\mathcal{G}_n$. Z_0 est donc une variable certaine de valeur 1 et la loi de Z_1 est donc celle de X.
On note

- $\varphi = \varphi_X$: fonction génératrice de X
- $\varphi_n = \varphi_{Z_n}$: fonction génératrice de Z_n

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \mathrm{P}(Z_n = 0)$.
   Monter que la suite (u_n) est croissante et convergente.
2. (a) *Supposons $[Z_1 = k]$ réalisé où k est un entier naturel donné non nul.*
   Notons $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \cdots, \mathcal{P}_k$ les k plantes de la génération $\mathcal{G}_1$ et pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, la variable aléatoire $W_{j,n}$ égale au nombre de plantes de la génération $\mathcal{G}_n$ descendant de la plante $\mathcal{P}_j$. Remarquons alors que $Z_n = \sum\limits_{j=1}^{k} W_{j,n}$ et que $W_{1,n}, W_{2,n}, \cdots, W_{k,n}$ sont k variables aléatoires indépendantes et de même loi que Z_{n-1}.
   Justifier alors $\mathrm{P}_{[Z_1=k]}(Z_n = 0) = \big(\mathrm{P}(Z_{n-1} = 0)\big)^k$ pour tout couple $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in [\![2, +\infty[\![$, $u_n = \varphi(u_{n-1})$

3. Dans cette question, nous allons supposer que chaque plante émet au cours de sa vie N graines où N est un entier donné, chacune d'entre elles ayant la probabilité p ($p \in]0,1[$) de germer et de donner un descendant, indépendamment des autres.

(a) Quelle est la loi de X ?
Expliciter la relation $u_n = \varphi(u_{n-1})$ vérifiée pour tout $n \in [\![2, +\infty[\![$.

(b) Pour tout $x \in]0,1]$, on pose :

$$g(x) = (px + 1 - p)^N - x \quad \text{et} \quad h(x) = N \ln(px + 1 - p) - \ln x$$

Montrer que $g(x)$ et $h(x)$ ont même signe pour tout $x \in]0,1]$.

(c) Calculer $h(u_1)$. Quel est son signe ?

(d) Étudier les variations de h. Dans quels cas la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vaut-elle 1 ?

4. Dans cette question, nous supposerons que X est distribuée selon une Loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
La suite (u_n) vérifie donc $\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ u_n = \varphi(u_{n-1}) = \exp(\lambda(u_{n-1} - 1))$

(a) On suppose $\lambda \leq 1$.
Étudier sur $[0,1]$ les variations de la fonction $\delta : x \longmapsto \varphi(x) - x$ sur $[0,1]$ et en déduire la limite de la suite (u_n).

(b) On suppose $\lambda > 1$.

i. Étudier sur $[1, +\infty[$ les variations de la fonction $\theta : u \longmapsto 1 - \frac{\ln u}{u}$.

ii. En déduire l'existence de $\beta \in]0,1[$, tel que $\delta'(x) = 0$.
Déterminer les variations de δ sur $[0,1]$.

iii. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0,1[$ tel que $\varphi(\alpha) = \alpha$.

iv. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \alpha$ et préciser la limite de la suite (u_n).

5. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite croissante d'événements, c'est à dire telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_n \subset A_{n+1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous désignerons par B_n les résultats qui réalisent A_{n+1} sans réaliser A_n et noterons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = A_{n+1} \setminus A_n$. Nous poserons $B_0 = A_1$.

(a) Justifier $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n$.

(b) En déduire $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n)$.

(c) Que représente l'événement $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} [Z_n = 0]$. Interprétez alors en quelques lignes les limites obtenues dans les questions 3 et 4.

- fin -