Corrigé du devoir surveillé n^{o}3

Problème 1

1. Exemple 1

   $u_n = \dfrac{n+1}{n}$, donc $p_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{2\times 3\times\cdots\times(n+1)}{1\times 2\times\cdots\times n} = n+1$ donc

   $\boxed{\text{le produit infini } \prod u_n \text{ diverge.}}$

2. Exemple 2

   (a) On prouve cette formule par récurrence sur n :
   $n=0 : \sin a = 2^0 \sin(a)\times 1$ *(un produit portant sur un ensemble d'indices vide est égal à 1 par convention).*
   Comme la suite (p_n) n'est définie qu'à partir de $n=1$, on peut se contenter d'une initialisation pour $n=1$: $\sin a = 2\,\sin\left(\dfrac{a}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a}{2}\right)$ *(formule de duplication du sinus).*

   Soit $n \geqslant 1$, on suppose que $\sin a = 2^n \sin\left(\dfrac{a}{2^n}\right)\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$; or $\sin\left(\dfrac{a}{2^n}\right) = 2\,\sin\left(\dfrac{a}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\dfrac{a}{2^{n+1}}\right)$,

   donc $\sin a = 2^n \times 2\,\sin\left(\dfrac{a}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\dfrac{a}{2^{n+1}}\right)\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{a}{2^k}\right) = 2^{n+1}\sin\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)\prod_{k=1}^{n+1}\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$.

   (b) Comme $a \notin \{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$, $\sin a \neq 0$ et de même, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\sin\left(\dfrac{a}{2^n}\right)\neq 0$; ainsi $p_n = \dfrac{\sin a}{2^n \sin(a/2^n)}$

   $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{a}{2^n} = 0$ donc $\sin\left(\dfrac{a}{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{a}{2^n}\right)$ et $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^n\sin\left(\frac{a}{2^n}\right) = a$. La suite (p_n) converge vers $\dfrac{\sin a}{a}$,

   donc le produit infini $\prod u_n$ est convergent et $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} u_n = \frac{\sin a}{a}$

3. Quelques résultats de convergence

   (a) La fonction $f\ :\ x\mapsto \ln(1+x)$ est concave sur $\mathbb{R}^+$ *(dérivée décroissante ou dérivée seconde négative sur cet intervalle)* donc la courbe représentative de f est au dessous de ses tangentes. $y=x$ est l'équation de la tangente au point d'abscisse 0, donc $\forall x\geqslant 0,\ \ln(1+x)\leqslant x$.
   D'autre part, f est croissante et $f(0)=0$ donc $\forall x\geqslant 0,\ f(x)\geqslant 0$.

   (b) $\ln(1+x)\underset{x\to 0}{\sim} x$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, d'où $\exists\alpha>0$ tel que $\forall x\in[-\alpha,\alpha]$ tel que $x\neq 0$, $\dfrac{\ln(1+x)}{x}\geqslant\dfrac{1}{2}$.
   On peut se limiter à $x\in]0,\alpha]$, dans ce cas x est positif et l'on a : $\ln(1+x)\geqslant\dfrac{x}{2}$.

   (c) Supposons que la série $\sum w_k$ converge ; d'après la question précédente, $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ 0\leqslant\ln(1+w_k)\leqslant w_k$.
   D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\ln(1+w_k)$ converge.

   (d) Supposons que la série $\sum\ln(1+w_k)$ converge vers L ; $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\ln\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}u_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln(u_k) = \sum_{k=1}^{n}\ln(1+w_k)$.

   Par passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+w_n) = L$ donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}u_k\right) = L$, donc

   par composition de limites, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_n = e^L$; le produit infini $\prod u_n$ converge et $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}u_n = e^L$.

   (e) Supposons que le produit infini $\prod u_n$ converge vers L ; les termes u_n étant tous >1, la limite L l'est aussi, en particulier $L>0$. Donc $\ln\left(\prod u_n\right) = \sum\ln u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ln L$.

   Comme $0<\dfrac{\omega_k}{2}\leqslant\ln(1+\omega_k) = \ln u_k$ et que la série $\sum\ln u_n$ converge, la série $\sum\omega_n$ conerge par compraison des séries à termes positifs.

   (f) D'après la question 3e, $\prod u_n$ converge $\Longrightarrow\sum w_n$ converge.
   D'après les questions 3c et 3d, $\sum w_n$ converge $\Longrightarrow\prod u_n$ converge.

   $\boxed{\text{Conclusion : } \sum w_n \text{ converge} \iff \prod u_n \text{ converge.}}$

4. (a) La suite (S_n) diverge vers $+\infty$: en effet, $\forall k \geqslant 3,\ \dfrac{\ln k}{k} \geqslant \dfrac{1}{k} > 0$ et la série de terme général $\dfrac{1}{k}$ diverge. (S_n) est minorée par une suite qui diverge vers $+\infty$, donc par théorème de comparaison, diverge vers $+\infty$.

Rappel : une méthode possible pour prouver la divergence de la série harmonique.

On a établi à la question 3a un encadrement de $\ln(1+x)$ pour $x \geqslant 0$, donc $\forall k \geqslant 1,\ 0 < \ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right) \leqslant \dfrac{1}{k}$

$\forall n \geqslant 1,\ 0 < \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\Big((k+1) - \ln(k)\Big) = \ln(n+1)$.

La somme partielle de rang n de la série harmonique est minorée par $\ln(n+1)$ qui tend vers $+\infty$, d'où la divergence de cette série.

Pour $n \geqslant 1,\ \ln(p_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(\sqrt[k]{k}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ln k$, donc $p_n = \exp\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}\right) = e^{S_n}$.

(S_n) diverge vers $+\infty$ donc par composition de limites, p_n diverge vers $+\infty$.

(b) $\displaystyle\int_3^n \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_3^n$ donc $\boxed{\displaystyle\int_3^n \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{(\ln n)^2 - (\ln 3)^2}{2}}$

(c) On étudie le sens de variation de la fonction $g\ :\ x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$: g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $g'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.

g' est négative pour $x \geqslant e$, donc également pour $x \geqslant 3$, ainsi g est décroissante sur $[3, +\infty[$.

Soit $k \in \mathbb{N},\ k \geqslant 3$; $\forall x \in [k, k+1],\ g(k+1) \leqslant g(x) \leqslant g(k)$ c'est à dire $\dfrac{\ln(k+1)}{k+1} \leqslant \dfrac{\ln x}{x} \leqslant \dfrac{\ln k}{k}$.

Par intégration sur le segment $[k, k+1]$ $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\ln(k+1)}{k+1}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\ln k}{k}\,\mathrm{d}x$

soit $\boxed{\displaystyle\frac{\ln(k+1)}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\ln k}{k}}$

(d) Par sommation pour k variant de 3 à n, il vient :

$\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k+1)}{k+1} \leqslant \int_3^{n+1} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln k}{k}$ et par changement d'indice dans la première somme ($j = k+1$)

$\displaystyle\sum_{j=4}^{n+1} \frac{\ln j}{j} \leqslant \int_3^{n+1} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln k}{k}$ soit $\quad S_{n+1} - S_3 \leqslant \displaystyle\int_3^{n+1} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant S_n - S_2$ et finalement

$$\boxed{S_2 + \int_3^{n+1} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant S_n \leqslant S_3 + \int_3^{n} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x}$$

En utilisant le résultat de la question 4b, l'encadrement précédent peut s'écrire aussi

$S_2 + \dfrac{\big(\ln(n+1)\big)^2}{2} - \dfrac{(\ln 3)^2}{2} \leqslant S_n \leqslant S_3 + \dfrac{(\ln n)^2}{2} - \dfrac{(\ln 3)^2}{2} \qquad \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{(\ln n)^2}{2} = +\infty$, donc

$S_3 - \dfrac{(\ln 3)^2}{2} \underset{n\to\infty}{=} o\left(\dfrac{(\ln n)^2}{2}\right)$, de même $S_2 - \dfrac{(\ln 3)^2}{2} \underset{n\to\infty}{=} o\left(\dfrac{\big(\ln(n+1)\big)^2}{2}\right)$.

D'autre part on montre que $\ln(n+1) \underset{n\to\infty}{\sim} \ln n$:

$\ln(n+1) = \ln n\Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big) = \ln n + \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \ln n,\quad$ car $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Finalement, $\ln(n+1) \underset{n\to\infty}{\sim} \ln n$ donc $\Big(\ln(n+1)\Big)^2 \underset{n\to\infty}{\sim} \Big(\ln n\Big)^2$ et

$S_2 + \dfrac{\big(\ln(n+1)\big)^2}{2} - \dfrac{(\ln 3)^2}{2} \underset{n\to\infty}{\sim} S_3 + \dfrac{(\ln n)^2}{2} - \dfrac{(\ln 3)^2}{2} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{(\ln n)^2}{2}$, d'où la conclusion.

5. (a) Avec les notations précédentes, $w_k = a^{2^k}$ donc la convergence de (p_n) équivaut à celle de $\sum w_n$. Or $\forall n \geqslant 1,\ a^{2^k} \geqslant 1$ donc le terme général de la série ne tend pas vers 0, la série est grossièrement divergente (vers $+\infty$), donc (p_n) diverge également vers $+\infty$.

(b) On montre l'inégalité par récurrence sur k :
Initialisation : $0 \leqslant 2^0 = 1$ est vrai.
Soit $k \geqslant 0$, on suppose $k \leqslant 2^k$; alors $k+1 \leqslant 2^k + 1 \leqslant 2^k + 2^k$ (car $\forall k \geqslant 0,\ 2^k \geqslant 1$).
Donc $k+1 \leqslant 2^{k+1}$.

(c) $0 < a < 1$, donc $\big(n \leqslant p\big) \Rightarrow \big(a^p \leqslant a^n\big)$; et comme $k \leqslant 2^k$, on obtient $a^{2^k} \leqslant a^k$.
On en déduit $p_n \leqslant \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (1 + a^k)$; or la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a^k$ converge *(série géométrique de raison a avec $|a| < 1$).*
D'après la question 3, la suite (p_n) converge.

(d) On montre par récurrence sur n que $(1 - a^2)\, p_n = 1 - a^{2^{n+1}}$:
Initialisation : $(1 - a^2)\, p_1 = (1 - a^2)\,(1 + a^2) = (1 - a^4)$ donc la formule est vérifiée pour $n = 1$.
Soit $n \geqslant 1$, on suppose que $(1 - a^2)\, p_n = 1 - a^{2^{n+1}}$, alors
$(1 - a^2)\, p_{n+1} = (1 - a^2)\, p_n\,(1 + a^{n+1}) = (1 - a^{2^{n+1}})\,(1 + a^{2^{n+1}}) = (1 - a^{2^{n+2}})$

$$\lim_{n \to +\infty} 1 - a^{2^{n+1}} = 1 \text{ donc } \lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{1}{1 - a^2} \qquad \text{et } \boxed{\prod_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{1 - a^2}}$$

Problème 2

Partie I : Algèbre et probabilités

1. (a) • Si U_n est réalisé, le n^{e} lancer donne Π, donc si le $n+1^{\text{e}}$ donne Π, on a 2 Π consécutifs et U_{n+1} n'est pas réalisé, et si le $n+1^{\text{e}}$ lancer donne Φ, le dernier lancer ne donne pas Π donc U_{n+1} n'est pas réalisé non plus ; ainsi $\boxed{P(U_{n+1}|U_n)=0}$
   • Si V_n est réalisé, le n^{e} lancer donne Φ, donc si le $n+1^{\text{e}}$ donne Π, on n'a jamais deux Π consécutifs et U_{n+1} est réalisé, par contre si le $n+1^{\text{e}}$ lancer donne Φ, U_{n+1} n'est pas réalisé ; ainsi $\boxed{P(U_{n+1}|V_n)=P(\Pi)=p}$
   • Si U_n est réalisé, pour réaliser V_{n+1} il faut et il suffit que le $n+1^{\text{e}}$ lancer donne Φ, donc $\boxed{P(V_{n+1}|U_n)=P(\Phi)=q}$
   • Enfin si V_n est réalisé, l'obtention d'un Φ au $n+1^{\text{e}}$ lancer permet de réaliser V_{n+1}, pas celle d'un Π donc $\boxed{P(V_{n+1}|V_n)=P(\Phi)=q}$

   (b) • L'événement $U_n\cup V_n$ est « Les n premiers lancers ne donnent pas deux Π consécutifs » donc $U_{n+1}\subset(U_n\cup V_n)$. Ainsi $U_{n+1}=U_{n+1}\cap(U_n\cup V_n)=(U_{n+1}\cap U_n)\cup(U_{n+1}\cap V_n)$, donc $u_{n+1}=P(U_{n+1})=P(U_n)\,P(U_{n+1}|U_n)+P(V_n)\,P(U_{n+1}|V_n)=0+p\ v_n$
   • $S_n=U_n\cap$ « Obtenir Π au $n+1^{\text{e}}$ lancer » et comme les lancers sont indépendants, $P(S_n)=P(U_n)\times p$.
   • De même que U_{n+1}, $V_{n+1}\subset(U_n\cup V_n)$; donc $v_{n+1}=P(V_{n+1})=P(U_n)\,P(V_{n+1}|U_n)+P(V_n)\,P(V_{n+1}|V_n)$
   $=u_n\times q+v_n\times q$.

   (c) V_1 est l'événement « Obtenir Φ au premier lancer. », U_1 l'événement « Obtenir Π au premier lancer. » et S_1 : « Obtenir Π aux deux premiers lancers. » ; donc $P(V_1)=q$, $P(U_1)=p$ et $P(S_1)=p^2$.
   On peut regrouper les résultats pour $n\leqslant 3$ dans un petit tableau :

n	1	2	3
u_n	p	$p\,q$	$p\,q$
v_n	q	q	$q^2\,(p+1)$
s_n	p^2	$p^2 q$	$p^2\,q$

2. (a) Soit $n\geqslant 1$; d'après la question 1, $v_{n+2}=q\,u_{n+1}+q\,v_{n+1}$ et $u_{n+1}=p\,v_n$, donc $v_{n+2}=p\,q\,v_n+q\,v_{n+1}$
   En multipliant l'égalité précédente par p^2, on obtient : $p\,(p\,v_{n+2})=p\,q\,(p\,v_{n+1})+p^2\,q\,(p\,v_n)$
   qui peut aussi s'écrire : $p\,u_{n+3}=p\,q\,u_{n+2}+p^2\,q\,u_{n+1}$, puis sous la forme $s_{n+3}=q\,s_{n+2}+p\,q\,s_{n+1}$
   La formule demandée est donc valable pour $n\geqslant 2$, il suffit alors de la vérifier pour $n=1$: on a bien $s_3=q\,s_2+p\,q\,s_1$.

   (b) Si $p=\dfrac{2}{3}$, alors $v_1=v_2=\dfrac{1}{3}$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+2}=\dfrac{1}{3}\,v_{n+1}+\dfrac{2}{9}\,v_n$
   L'équation caractéristique : $9\,X^2-3\,X-2=0$ admet $\dfrac{2}{3}$ et $-\dfrac{1}{3}$ comme racines, donc il existe deux constantes α et β telles que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ v_n=\alpha\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+\beta\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$

$$\begin{cases} v_1=\alpha\left(\dfrac{2}{3}\right)+\beta\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{3}\\[2mm] v_2=\alpha\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+\beta\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{1}{3}\end{cases}\quad \text{donc } \alpha=\frac{2}{3},\ \beta=\frac{1}{3}\ \text{et}\ \boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ v_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-\left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}}$$

   Ainsi, $\forall n\geqslant 2$ $\boxed{u_n=\dfrac{2}{3}\,v_{n-1}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}+2\left(\dfrac{-1}{3}\right)^{n+1}}$ *(cette formule est également valable pour $n=1$).*
   De même, $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ s_n=\dfrac{2}{3}\,u_n=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+2}-4\left(\dfrac{-1}{3}\right)^{n+2}=\dfrac{4}{9}\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-\left(\dfrac{-1}{3}\right)^n\right]$

   (c) Dans le cas général, l'équation caractéristique est $X^2-q\,X-p\,q=0$, son discriminant est $\Delta=q^2+4\,p\,q$ *(toujours strictement positif)* et les racines sont r_1 et r_2. Donc il existe deux constantes réelles (dépendant uniquement des cœfficients p et q) telles que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ s_n=\alpha\,r_1^n+\beta\,r_2^n$
   Or $r_1-r_2=\sqrt{\Delta}$, donc $\dfrac{p^2}{\sqrt{\Delta}}\,(r_1-r_2)=p^2=s_1$ et $\dfrac{p^2}{\sqrt{\Delta}}\left(r_1^2-r_2^2\right)=\dfrac{p^2}{\sqrt{\Delta}}\,(r_1-r_2)\,(r_1+r_2)=p^2\times q=s_2$

Pour $n=1$ et $n=2$, on a bien $s_n = \dfrac{p^2}{\sqrt{\Delta}}\, r_1^n - \dfrac{p^2}{\sqrt{\Delta}}\, r_2^n$, donc $\alpha = \dfrac{p^2}{\sqrt{\Delta}}$ et $\beta = -\dfrac{p^2}{\sqrt{\Delta}}$

3. (a) Soit $P(X) = X^2 - q\,X - p\,q$; $P(1) = 1 - q - p\,q = p - p\,q = p^2 > 0$, $P(0) = -p\,q < 0$ et $P(-1) = 1 + q - p\,q = 1 + q^2 > 0$. P est positif à l'extérieur de ses racines et négatif entre les racines, par conséquent $-1 < r_1 < 0 < r_2 < 1$. On en déduit que les séries de terme général r_1^n et r_2^n sont des séries géométriques absolument convergentes et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} s_n = \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(r_1^n - r_2^n\right) = \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}} \left(\frac{r_1}{1-r_1} - \frac{r_2}{1-r_2}\right)$
$= \dfrac{p^2}{\sqrt{\Delta}} \times \dfrac{r_1 - r_2}{r_1\,r_2 - (r_1 + r_2) + 1} = \dfrac{p^2}{\sqrt{\Delta}} \times \dfrac{\sqrt{\Delta}}{-q\,p - q + 1}$

$-q\,p - q + 1 = -q\,p + p = p^2$ donc $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} s_n = 1}$

(b) – Les événements $[X=i]$ et $[X=j]$ pour $i \neq j$ sont deux à deux incompatibles ; de plus $[X=n]$ est l'événement S_n et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n) = 1$ donc la famille $\Big([X=n]\Big)$ forme un système quasi complet d'événements.

– $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\,s_n = \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(n\,r_1^n - n\,r_2^n\right) = \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}} \left(\frac{r_1}{(1-r_1)^2} - \frac{r_2}{(1-r_2)^2}\right) = \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}\, \frac{\left(r_1(1-r_2)^2 - r_2(1-r_1)^2\right)}{(-q\,p - q + 1)^2}$
$= \dfrac{p^2}{\sqrt{\Delta}} \times \dfrac{(r_1 - r_2)\,(1 - r_1 r_2)}{p^4} = \dfrac{1 - r_1\,r_2}{p^2} = \dfrac{1 + p\,q}{p^2}$ d'où
$\displaystyle E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)\,P(X = n+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)\,s_n = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n + \sum_{n=1}^{+\infty} n\,s_n = 1 + \frac{(1 + p\,q)}{p^2}$

$$\boxed{E(X) = \frac{1+p}{p^2}}$$

– $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 s_n = \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(n^2 r_1^n - n^2 r_2^n\right) = \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}} \left(\frac{r_1\,(1+r_1)}{(1-r_1)^3} - \frac{r_2\,(1+r_2)}{(1-r_2)^3}\right)$
$\displaystyle = \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}\, \frac{\left(r_1(1+r_1)\,(1-r_2)^3 - r_2(1+r_2)\,(1-r_1)^3\right)}{(-q\,p - q + 1)^3}$

On simplifie : $(1+r_1)\,(1-r_2) = 1 - r_1\,r_2 + r_1 - r_2 = 1 + \sqrt{\Delta} + p\,q$ et $r_1\,(1-r_2)^2 = r_1\,r_2^2 + 2\,p\,q + r_1$
de même $(1+r_2)\,(1-r_1) = 1 - r_1\,r_2 + r_2 - r_1 = 1 - \sqrt{\Delta} + p\,q$ et $r_2\,(1-r_1)^2 = r_2\,r_1^2 + 2\,p\,q + r_2$
$r_1(1+r_1)\,(1-r_2)^3 - r_2(1+r_2)\,(1-r_1)^3 = \sqrt{\Delta}\,(1+p\,q)^2 + \sqrt{\Delta}\,(-p\,q^2 + 4\,p\,q + q)$ donc
$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 s_n = \frac{(1+p\,q)^2 + 4\,p\,q + q - p\,q^2}{p^4}$ et $\displaystyle E(X^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)^2 s_n = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 s_n + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n s_n + \sum_{n=1}^{+\infty} s_n$
$E(X^2) = \dfrac{(1+p\,q)^2 + 4\,p\,q + q - p\,q^2 + 2\,p^2\,(1+p\,q) + p^4}{p^4} = \dfrac{2 + 4\,p - p^2 - p^3}{p^4}$

$$\boxed{E(X^2) = \frac{2 + 4\,p - p^2 - p^3}{p^4}}$$

On peut alors calculer la variance : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dfrac{2 + 4\,p - p^2 - p^3}{p^4} - \dfrac{(1+p)^2}{p^4}$

$$\boxed{V(X) = \frac{1 + 2\,p - 2\,p^2 - p^3}{p^4} = \frac{q\,(p^2 + 3\,p + 1)}{p^4}}$$

Partie II : Combinatoire et probabilités

1. (a) Les lancers successifs sont mutuellement indépendants donc on a un schéma de Bernoulli et $\forall j \in [\![0, n]\!]$ la probabilité d'avoir obtenu j fois Π *(et donc $n-j$ fois Φ)*, est
$\dbinom{n}{j} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^j \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-j} = \boxed{\dbinom{n}{j} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n}$

(b) Les résultats des lancers des deux pièces sont indépendants, et les événements

« La pièce 1 donne j fois Π »et « La pièce 2 donne j fois Π »sont équiprobables, donc $p_j(n) = \left(\dfrac{\binom{n}{j}}{2^n}\right)^2$

(c) A_n est la réunion disjointe des événements $B_{j,n}$ « Les deux pièces ont donné j fois Π », donc

$$P(A_n) = \sum_{j=0}^{n} P(B_{j,n}) = \sum_{j=0}^{n} p_j(n) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\binom{n}{j}}{2^n}$$

$$P(A_6) = \frac{1}{2^{12}} \left[\binom{6}{0}^2 + \binom{6}{1}^2 + \binom{6}{2}^2 + \binom{6}{3}^2 + \binom{6}{4}^2 + \binom{6}{5}^2 + \binom{6}{6}^2\right]$$

$$= \frac{1}{2^{12}} \left(1 + 6^2 + 15^2 + 20^2 + 15^2 + 6^2 + 1\right) = \frac{1}{2^{12}} \left(1+36+225+400+225+36+1\right) = \frac{924}{4 \times 1\ 024}$$

$$\boxed{P(A_6) = \frac{231}{1\ 024} \simeq 0,23}$$

2. (a) Une partie à n éléments de E est une combinaison de n éléments de E, donc $\boxed{\mathrm{Card}(P) = \binom{2\,n}{n}}$

(b) Une partie à n éléments de E contenant j boules blanches correspond à une combinaison de j éléments parmi n (pour les boules blanches) puis une combinaison de $n-j$ éléments parmi n (pour les noires) ; donc $\boxed{\mathrm{Card}(P_j) = \binom{n}{j}\binom{n}{n-j}}$

(c) Les ensembles $P_j,\ j \in [\![0,n]\!]$ forment une partition de l'ensemble P, donc

$$\mathrm{Card}(P) = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{Card}(P_j) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n}{n-j} = \binom{2\,n}{n}$$

De $\forall j \in [\![0,n]\!],\ \binom{n}{j} = \binom{n}{n-j}$, on déduit $\boxed{\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 = \binom{2\,n}{n}}$

3. (a) Toutes les séries de k lancers étant équiprobables, $P(A_k) = \dfrac{\mathrm{Card}(A_k)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$;

or $\mathrm{Card}(A_k) = \mathrm{Card}(P)$ (avec $n = k$) et $\mathrm{Card}(\Omega) = \left(2^k\right)^2 = 2^{2k}$, donc $P(X_k = 1) = \dfrac{\binom{2\,k}{k}}{2^{2k}}$

X_k est une variable qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{\binom{2\,k}{k}}{2^{2k}}$, donc

$$E(N) = \sum_{k=0}^{n} E(X_k) = \sum_{k=0}^{n} P(X_k = 1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{2\,k}{k}}{2^{2k}}$$

(b) Pour $n = 1,\ E(N) = \displaystyle\sum_{k=0}^{1} E(X_k) = \frac{\binom{0}{0}}{2^0} + \frac{\binom{2}{1}}{2^2} = \frac{3}{2} = \frac{2 \times 1 + 1}{2^2}\binom{2}{1}$

Soit $n \geqslant 1$, on suppose que $E(N) = \dfrac{2\,n+1}{2^{2n}}\dbinom{2\,n}{n}$, au rang $n+1$ on obtient :

$$E(N) = \sum_{k=0}^{n+1} P(X_k = 1) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\binom{2\,k}{k}}{2^{2k}} = \frac{\binom{2\,n+2}{n+1}}{2^{2n+2}} + \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{2\,k}{k}}{2^{2k}} = \frac{\binom{2\,n+2}{n+1}}{2^{2n+2}} + \frac{2\,n+1}{2^{2n}}\binom{2\,n}{n}$$

$$\binom{2\,n}{n} = \frac{(n+1)^2}{(2\,n+2)\,(2\,n+1)} \times \binom{2\,n+2}{n+1}, \text{ donc } E(N) = \binom{2\,n+2}{n+1}\left[\frac{2\,n+1}{2^{2n}} \times \frac{(n+1)^2}{(2\,n+2)\,(2\,n+1)} + \frac{1}{2^{2n+2}}\right]$$

$$= \binom{2\,n+2}{n+1}\left(\frac{n+1}{2 \times 2^{2n}} + \frac{1}{2^{2n+2}}\right)$$

$$\boxed{E(N) = \frac{2\,n+3}{2^{2n+2}}\binom{2\,n+2}{n+1}}$$