Corrigé du devoir surveillé

Exercice

1. Soit $x \in \mathrm{Im}(u^2+\mathrm{id})$; il existe $y \in \mathbb{R}^3$ tel que $x = u^2(y)+y$. Donc $u(x) = u\big(u^2(y)+y\big) = u^3(y)+y = 0_{\mathbb{R}^3}$. Ainsi $x \in \mathrm{Ker}(u)$
2. • Soit $x \in \mathbb{R}^3$, supposons qu'il existe $x_1 \in \mathrm{Ker}(u)$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}(u^2+\mathrm{id})$ tels que $x = x_1 + x_2$, alors :
   $u(x) = u(x_1)+u(x_2) = u(x_2)$ puis
   $u^2(x) = u^2(x_2) = -x_2$ puisque $x_2 \in \mathrm{Ker}(u^2+\mathrm{id})$ par hypothèse.
   Donc si la décomposition existe, on a $x_2 = -u^2(x)$ et $x_1 = x - x_2 = x + u^2(x)$.
   Remarque : la décomposition, sous réserve d'existence, est unique, donc $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u^2+\mathrm{id})$ sont en somme directe.
   • On vérifie que les vecteurs trouvés appartiennent bien à $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u^2+\mathrm{id})$ respectivement :
   $u(x_1) = u\big(x+u^2(x)\big) = u(x)+u^3(x) = 0$, d'où $x_1 \in \mathrm{Ker}(u)$.
   $(u^2+\mathrm{id})(x_2) = (u^2+\mathrm{id})\big(-u^2(x)\big) = -u^4(x)-u^2(x)$; or $u^4(x) = u^3\big(u(x)\big) = -u\big(u(x)\big)$, donc
   $(u^2+\mathrm{id})(x_2) = u^2(x)-u^2(x) = 0$, donc $x_2 \in \mathrm{Ker}(u^2+\mathrm{id})$.
3. $\mathrm{Ker}(u^2+\mathrm{id}) = \{0\}$ entraine $\mathrm{Ker}(u) = \mathbb{R}^3$, or u n'est pas l'endomorphisme nul donc son noyau n'est pas égal à $\mathbb{R}^3$.
4. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u^2+\mathrm{id})$ non nul, alors $x \notin \mathrm{Ker}(u)$ *(puisque les 2 sous-espaces sont en somme directe)* donc $u(x) \neq 0$. Vérifions tout d'abord que $u(x) \in \mathrm{Ker}(u^2+\mathrm{id})$:
   $\big(u^2+\mathrm{id}\big)\big(u(x)\big) = u^2\big(u(x)\big)+u(x) = u^3(x)+u(x) = -u(x)+u(x) = 0$.
   Montrons ensuite que la famille $\big(x, u(x)\big)$ est libre :
   On résout $\alpha\, x + \beta\, u(x) = 0$ où α et β sont deux réels quelconques ; en composant par u, on obtient :
   $\alpha\, u(x) + \beta\, u^2(x) = 0$, c'est à dire : $\alpha\, u(x) - \beta\, x = 0$. On résout alors le système :
   $\begin{cases} \alpha\, x + \beta\, u(x) = 0 \\ -\beta\, x + \alpha\, u(x) = 0 \end{cases}$ qui donne $(\alpha^2+\beta^2)\, x = 0$ d'où $\alpha = \beta = 0$.
   $\big(x, u(x)\big)$ est une famille libre de $\mathrm{Ker}(u^2+\mathrm{id})$; or $\mathrm{Ker}(u^2+\mathrm{id})$ est de dimension au plus 2 (puisqu'inclus strictement dans $\mathbb{R}^3$), donc $\mathrm{Ker}(u^2+\mathrm{id})$ est de dimension 2 et $\big(x, u(x)\big)$ en est une base.
5. Soit $y \in \mathrm{Ker}(u)$ non nul *(y existe puisqu'on admet que u n'est pas injectif)*, c'est une base de $\mathrm{Ker}(u)$ *(en effet $\dim\Big(Ker(u^2+id)\Big) = 2$ donc $\dim\Big(Ker(u)\Big) = 1$)*.
   La famille $\big(y, x, u(x)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ *(théorème de cours)*.
   $u(y) = 0$ car $y \in \mathrm{Ker}(u)$, $u(x)$ est le deuxième vecteur de la base, et $u\big(u(x)\big) = -x$ puisque $x \in \mathrm{Ker}(u^2+\mathrm{id})$.
   La matrice de u dans la base $\big(y, x, u(x)\big)$ est donc la matrice donnée dans l'énoncé.
6. Si $A^3 + A = 0$, alors soit u un endomorphisme associé à A : A est la matrice de u dans une certaine base de $\mathbb{R}^3$. D'après ce qui précède, on peut trouver une base de $\mathbb{R}^3$ *(composée d'un vecteur du noyau et de 2 vecteurs de $Ker(u^2+id)$)* dans laquelle la matrice de u soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Réciproquement, soit A une matrice semblable à B, il existe alors une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = P\,B\,P^{-1}$; donc $A^3 = P\,B^3\,P^{-1}$ et $A^3 + A = P\,(B^3+B)\,P^{-1} = P\,0\,P^{-1} = 0$ *(matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$)*

Problème 1

Partie I : Étude de l'application D

1. (a) La dérivée d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ existe et est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc $\forall f \in E,\ D(f) \in E$.
   Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et soient f et g deux fonctions de E, alors :
   $D(\alpha\, f + \beta\, g) = (\alpha\, f + \beta\, g)' = \alpha\, f' + \beta\, g' = \alpha\, D(f) + \beta\, D(g)$; donc D est linéaire, de E vers E. $D \in \mathscr{L}(E)$.

   (b) Soit $f \in \mathrm{Ker}\ D$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = 0$ donc f est constante sur $\mathbb{R}$.
   Réciproquement, toute fonction constante appartient à $\mathrm{Ker}\ D$. Donc $\mathrm{Ker}\ D = \mathrm{Vect}\ (1)$.
   Montrons à présent que D est surjective : en effet, toute fonction f de E est continue *(puisque de classe $\mathscr{C}^\infty$)* donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Soit F l'une d'entre elles ; on a bien $D(F) = f$, donc $f \in \mathrm{Im}\ (D)$.

2. (a) $\forall t \in \mathbb{R},\ a\, f_1(t) + b\, f_2(t) + c\, f_3(t) = 0$.
En particulier pour $t = 0$: $a + c = 0$
pour $t = \dfrac{2\,\pi}{\sqrt{3}}$: $e^{\frac{2\,\pi}{\sqrt{3}}}\, a + e^{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}}\, c = 0$, en résolvant ce sytème, on obtient $a = c = 0$.
Reste à prendre une valeur de t telle que $\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) \neq 0$, par exemple $t = 1$, pour en déduire $b = 0$.
$\Big(\forall t \in \mathbb{R},\ a\, f_1(t) + b\, f_2(t) + c\, f_3(t) = 0\Big) \Longrightarrow (a = b = c = 0)$ donc $\Big(a\, f_1 + b\, f_2 + c\, f_3 = 0\Big) \Longrightarrow (a = b = c = 0)$
la famille $(f_1,\ f_2,\ f_3)$ est libre.
(b) À l'ordre 2 au voisinage de 0, on peut écrire :
$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2),\ e^{-\frac{t}{2}} = 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{8} + o(t^2),\ \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \frac{3\,t^2}{8} + o(t^2)$ et $\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{t\sqrt{3}}{2} + o(t^2)$
Donc $a\, f_1(t) + b\, f_2(t) + c\, f_3(t) = a + c + (a + \frac{b\sqrt{3}}{2} - \frac{c}{2})\, t + (\frac{a}{2} - \frac{b\sqrt{3}}{4} - \frac{c}{4})\, t^2 + o(t^2)$.
Par unicité du développement limité au voisinage d'un point, on obtient le système :
$\begin{cases} a + \qquad\qquad c = 0 \\ a + \frac{b\sqrt{3}}{2} - \frac{c}{2} = 0 \\ \frac{a}{2} - \frac{b\sqrt{3}}{4} - \frac{c}{4} = 0 \end{cases}$ La résolution donne encore a=b=c=0.
(c) Lorsque $t \to +\infty$, f_1 tend vers $+\infty$, f_2 et f_3 sont bornées, en effet :
$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \left|e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)\right| \leqslant e^{-\frac{t}{2}} \leqslant 1$, et $\left|e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)\right| \leqslant e^{-\frac{t}{2}} \leqslant 1$.
Si $a \neq 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} a\, f_1(t) + b\, f_2(t) + c\, f_3(t) = \pm\infty$ selon le signe de a ; donc $a = 0$. On résout ensuite $\forall t \in \mathbb{R},\ b\, f_2(t) + c\, f_3(t) = 0$, puis en prenant des valeurs particulières de t (0 et $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ par exemple) on retrouve $b = c = 0$.

3. $G = \text{Vect }(f_1,\ f_2,\ f_3)$ donc $\dim\,(G) \leqslant 3$. On a montré précédemment (question 2) que la famille $(f_1,\ f_2,\ f_3)$ est libre ; par construction elle engendre G, c'est donc une base de G et $\dim\,(G) = 3$.

4. $\forall t \in \mathbb{R},\ f_1'(t) = e^t,\ \ f_2'(t) = e^{-\frac{t}{2}}\Big(-\dfrac{1}{2}\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)\Big)$ et $f_3'(t) = -\,e^{-\frac{t}{2}}\Big(\dfrac{1}{2}\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)\Big)$. Donc $D(f_1) = f_1$, $D(f_2) = -\dfrac{1}{2}\, f_2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, f_3$ et $D(f_3) = -\dfrac{1}{2}\, f_3 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, f_2$
Ainsi $D(f_1) \in G$, $D(f_2) \in G$ et $D(f_3) \in G$; par linéarité de D, $\forall f \in G,\ D(f) \in G$.

5. D'après les calculs de la question précédente, $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$.

6. $M^3 = I_3$.

7. $M \times M^2 = M^2 \times M = I_3$ donc M est inversible d'inverse M^2.

8. M est une matrice associée à $\widehat{D}$, M est inversible, donc $\widehat{D}$ est bijectif, c'est un automorphisme de G.

9. M^{-1} est associée à $(\widehat{D})^{-1}$, or $M^{-1} = M^2$ donc $(\widehat{D})^{-1} = \widehat{D} \circ \widehat{D}$.

Partie II : Résolution d'une équation différentielle d'ordre 3

1. Soit f une solution de $(\mathcal{E})$, on démontre $\forall n \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathscr{D}^n$ par récurrence sur n.
Initialisation : par hypothèse, f est de classe $\mathscr{D}^3$, donc la propriété est vérifiée pour $n \leqslant 3$.
Soit $n \geqslant 3$, on suppose que f est de classe $\mathscr{D}^n$; comme $f^{'''} = f$, on en déduit que $f^{'''}$ est de classe $\mathscr{D}^n$, donc $f^{(n+3)}$ existe f est donc de classe $\mathscr{D}^{n+3}$ donc a fortiori de classe $\mathscr{D}^{n+1}$.

2. Soit f une solution polynômiale, supposons f non nulle ; le degré de $f^{'''}$ est alors strictement inférieur à celui de f donc on ne peut pas avoir $f^{'''} = f$. Par conséquent, la seule solution polynômiale est la fonction nulle.

3. On a prouvé à la partie précédente que $\widehat{D}^3 = \text{id}_G$, donc $\forall f \in G,\ D^3(f) = \widehat{D}^3(f) = f$. Ainsi $f \in \text{Ker }(T)$ donc $G \subset \text{Ker }(T)$.

4. (a) D'après la question 1, g est dérivable. $g' = f^{'''} + f^{''} + f' = f + f^{''} + f'$ puisque $f^{'''} = f$; donc $g' = g$.
(b) $(\mathcal{E}')$ est une équation différentielle d'ordre 1 à cœfficients constants, les solutions sont les fonctions de la forme : $x \mapsto \lambda\, e^x$ où λ est une constante réelle quelconque.

(c) $y'' + y' + y = 0$ est une équation différentielle d'ordre 2 à cœfficients constants, l'équation caractéristique associée est : $X^2 + X + 1 = 0$ dont les solutions sont $e^{\frac{i2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $e^{-\frac{i2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Les solutions sont donc les fonctions de la forme $t \mapsto A\,e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + B\,e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$ où A et B sont des constantes réelles quelconques.
L'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2, dont une base est la famille $(f_1,\, f_2)$, f_1 et f_2 étant les fonctions définies en préambule du problème.

(d) Une solution particulière de $y'' + y' + y = \lambda\,e^t$ est $t \mapsto \frac{\lambda}{3}\,e^t$. L'ensemble des solutions de cette équation différentielle est donc l'ensemble des fonctions de la forme $t \mapsto A\,e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + B\,e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\lambda}{3}\,e^t$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

(e) Soit donc $f \in \text{Ker }(T)$, $f'' + f' + f$ est solution de $(\mathcal{E}')$, donc de la forme $t \mapsto \lambda\,e^t$; ainsi
$f \in \text{Ker }(T) \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}\ /\ f'' + f' + f = \lambda\,e^t$; donc $\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2$ tels que :
$f\ : t \mapsto A\,e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + B\,e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\lambda}{3}\,e^t$.
Finalement, $f \in \text{Ker }(T) \Rightarrow f \in G$, et par suite $\text{Ker }(T) = G$.

Problème 2

1. (a) L'image par τ d'une suite réelle est bien une suite réelle, donc τ est bien à valeurs dans E.
Soient (u) et $(v) \in E$, λ et $\mu \in \mathbb{R}$; $\forall n \in \mathbb{N},\ \tau(\lambda\,u + \mu\,v)_n = \lambda\,u_{n+1} + \mu\,v_{n+1}$
donc $\tau(\lambda\,u + \mu\,v) = \lambda\,\tau(u) + \mu\,\tau(v)$; τ est bien un endomorphisme de E.

   (b) $(u) \in \text{Ker }(\tau + 2\,\text{id}) \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} + 2\,u_n = 0$, c'est à dire (u) est une suite géométrique de raison -2.
Soit (x) la suite de terme général $x_n = (-2)^n$, $\text{Ker }(\tau + 2\,\text{id}) = \text{Vect }(x)$.

   (c) i. $(u) \in \text{Ker }(\tau - 3\,\text{id})^2 \iff (v) = (\tau - 3\,\text{id})(u) \in \text{Ker }(\tau - 3\,\text{id})$, c'est à dire $\forall n \in N,\ v_{n+1} - 3\,v_n = 0$.
Or, (v) est définie par : $\forall n \in N,\ v_n = u_{n+1} - 3\,u_n$, donc
$(u) \in \text{Ker }(\tau - 3\,\text{id})^2 \iff \forall n \in N,\ (u_{n+2} - 3\,u_{n+1}) - 3\,(u_{n+1} - 3\,u_n) = 0$.

   ii. L'équation caractéristique associée est $X^2 - 6\,X + 9 = 0$ qui admet 3 comme racine double. Les suites solutions sont donc les suites (u) pour lesquelles qu'il existe deux constantes réelles α et β *(donc indépendantes de n)* telles que l'on ait : $\forall n \in N,\ u_n = (\alpha + n\,\beta)\,3^n$.

   iii. Toute suite solution s'exprime donc comme combinaison linéaire des deux suites (a) et (b) définies respectivement par $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 3^n$ et $b_n = n\,3^n$. On vérifie que (a) et (b) forment une famille libre : On résout $\alpha\,(a) + \beta\,(b) = 0$ c'est à dire $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha\,a_n + \beta\,b_n = 0$.
En particulier pour $n = 0$ on obtient $\alpha = 0$, puis pour $n = 1$, $3\,\alpha + 3\,\beta = 0$.
Finalement, la famille $\big((a),\,(b)\big)$ est une base de l'ensemble des solutions, qui est donc un espace vectoriel de dimension 2.

2. (a) $F \subset E$ et $F \neq \emptyset$ car la suite nulle appartient à F.
Soient (u) et $(v) \in F$, λ et $\mu \in \mathbb{R}$, on a :$(u) \in F$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} - 4\,u_{n+2} - 3\,u_{n+1} + 18\,u_n = 0$
$(v) \in F$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+3} - 4\,v_{n+2} - 3\,v_{n+1} + 18\,v_n = 0$
Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ (\lambda\,u_{n+3} + \mu\,v_{n+3}) - 4\,(\lambda\,u_{n+2} + \mu\,v_{n+2}) - 3\,(\lambda\,u_{n+1} + \mu\,v_{n+1}) + 18\,(\lambda\,u_n + \mu\,v_n) = 0$.
F est non vide et stable par combinaison linéaire, c'est un sous-espace vectoriel de E.

   (b) i. Soient (u) et $(v) \in F$, λ et $\mu \in \mathbb{R}$;
$$\begin{aligned}\varphi(\lambda\,u + \mu\,v) &= (\lambda\,u_0 + \mu\,v_0,\ \lambda\,u_1 + \mu\,v_1,\ \lambda\,u_2 + \mu\,v_2)\\ &= \lambda\,(u_0,\,u_1,\,u_2) + \mu\,(v_0,\,v_1,\,v_2)\\ &= \lambda\,\varphi(u) + \mu\,\varphi(v).\end{aligned}$$
$\forall (u, v) \in F^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \varphi(\lambda\,u + \mu\,v) = \lambda\,\varphi(u) + \mu\,\varphi(v)$ donc φ est un endomorphisme de F.

   - Calcul de $\text{Ker }(\varphi)$: Soit $(u) \in F$. $(u) \in \text{Ker }(\varphi) \iff u_0 = u_1 = u_2 = 0$. On montre par récurrence forte (à 3 termes) que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $\mathscr{P}_n : u_n = u_{n+1} = u_{n+2} = 0$.
$\mathscr{P}_0$ est vraie par hypothèse puisque $(u) \in \text{Ker }(\varphi)$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie.
$(u) \in F$ donc $u_{n+3} = 4\,u_{n+2} + 3\,u_{n+1} - 18\,u_n = 0$, donc $u_{n+1} = u_{n+2} = u_{n+3} = 0$ et $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. Donc $\text{Ker }(\varphi) = \{0\}$.
   - Calcul de $\text{Im }(\varphi)$: soit $(a,\,b,\,c) \in \mathbb{R}^3$. On définit la suite (u) par : $u_0 = a$, $u_1 = b, u_2 = c$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 4\,u_{n+2} + 3\,u_{n+1} - 18\,u_n$. $(u) \in F$ *(par construction)* et $\varphi(u) = (a,\,b,\,c)$ donc φ est surjective.
φ est donc bijective, c'est un isomorphisme de F vers $\mathbb{R}^3$.

ii. φ est un isomorphisme, donc $\dim(F) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

3. (a) Soit $(u) \in E$ et $v = \tau(u)$, on a établi à la question 1c que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = (u_{n+2} - 3\,u_{n+1}) - 3\,(u_{n+1} - 3\,u_n)$ $= u_{n+2} - 6\,u_{n+1} + 9\,u_n$. Posons $(w) = \big(\tau + 2\,\mathrm{id}\big)(v) = \big(\tau + 2\,\mathrm{id}\big) \circ \big(\tau - 3\,\mathrm{id}\big)^2(u)$. (w) est définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = v_{n+1} + 2\,v_n = (u_{n+3} - 6\,u_{n+2} + 9\,u_{n+1}) + 2\,(u_{n+2} - 6\,u_{n+1} + 9\,u_n)$
$= u_{n+3} - 4\,u_{n+2} + 3\,u_{n+1} + 18\,u_n$.

   Ceci est vrai quelle que soit la suite $(u) \in E$, donc $\big(\tau + 2\,\mathrm{id}\big) \circ \big(\tau - 3\,\mathrm{id}\big)^2 = \tau^3 - 4\,\tau^2 - 3\,\tau + 18\,\mathrm{id}$.

   Remarque : évidemment, on a aussi $\big(\tau - 3\,\mathrm{id}\big)^2 \circ \big(\tau + 2\,\mathrm{id}\big) = \tau^3 - 4\,\tau^2 - 3\,\tau + 18\,\mathrm{id}$.

   (b) Soit $(u) \in E$, $(u) \in \mathrm{Ker}\,\Big((\tau + 2\,\mathrm{id}) \circ \big(\tau - 3\,\mathrm{id}\big)^2\Big) \iff (u) \in \mathrm{Ker}\,\Big(\tau^3 - 4\,\tau^2 - 3\,\tau + 18\,\mathrm{id}\Big) \iff (u) \in F$.

   i. Soit $(u) \in \mathrm{Ker}\, f$, on a $f(u) = 0$ (suite nulle) ; g est un endomorphisme de E donc $g(0) = 0$, d'où $g \circ f(u) = g(0) = 0$, $(u) \in \mathrm{Ker}\,(g \circ f)$. Ainsi $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\,(g \circ f)$.

   ii. $\mathrm{Ker}\,\big(\tau + 2\,\mathrm{id}\big) \subset \mathrm{Ker}\,\Big((\tau + 2\,\mathrm{id}) \circ \big(\tau - 3\,\mathrm{id}\big)^2\Big) = F$, de même

   $\mathrm{Ker}\,\big(\tau - 3\,\mathrm{id}\big)^2 \subset \mathrm{Ker}\,\Big(\big(\tau - 3\,\mathrm{id}\big)^2 \circ \big(\tau + 2\,\mathrm{id}\big)\Big) = F$

   iii. $\mathrm{Ker}\,\big(\tau - 3\,\mathrm{id}\big)^2$ et $\mathrm{Ker}\,\big(\tau + 2\,\mathrm{id}\big)$ sont en somme directe : soit $u \in \mathrm{Ker}\,\big(\tau - 3\,\mathrm{id}\big)^2 \cap \mathrm{Ker}\,\big(\tau + 2\,\mathrm{id}\big)$.
   $u \in \mathrm{Ker}\,\big(\tau + 2\,\mathrm{id}\big)$ donc $\tau(u) = -2\,u$, $u \in \mathrm{Ker}\,\big(\tau - 3\,\mathrm{id}\big)^2$ donc $\tau(u) - 3\,u \in \mathrm{Ker}\,\big(\tau - 3\,\mathrm{id}\big)$.
   Finalement $\tau(u) - 3\,u = -2\,u - 3\,u = -5\,u \in \mathrm{Ker}\,\big(\tau - 3\,\mathrm{id}\big)$, d'où $10\,u - 3\,u = 0$, donc $u = 0$.
   $\mathrm{Ker}\,\big(\tau - 3\,\mathrm{id}\big)^2 \cap \mathrm{Ker}\,\big(\tau + 2\,\mathrm{id}\big) = \{0\}$ donc les deux sous-espaces sont en somme directe.

   On a montré que $\mathrm{Ker}\,\big(\tau - 3\,\mathrm{id}\big)^2$ est de dimension 2, $\mathrm{Ker}\,\big(\tau + 2\,\mathrm{id}\big)$ est de dimension 1, donc $\mathrm{Ker}\,\big(\tau - 3\,\mathrm{id}\big)^2 \oplus \mathrm{Ker}\,\big(\tau + 2\,\mathrm{id}\big)$ est un sous-espace de F de dimension 3, il est donc égal à F.

4. $\{u\}$ est une base de $\mathrm{Ker}\,\big(\tau + 2\,\mathrm{id}\big)$, *(question 1b)*, $\{v,\ w\}$ est une base de $\mathrm{Ker}\,\big(\tau - 3\,\mathrm{id}\big)^2$, *(question 1(c)iii)*, ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans F donc la famille formée de la réunion d'une base de chacun est une base de F.

5. L'ensemble des solutions de $(*)$ est égal à $F = \mathrm{Vect}\,(u,\ v,\ w)$, c'est donc l'ensemble des suites réelles (x) telles qu'il existe 3 constantes réelles λ, α et β telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = \lambda\,(-2)^n + \alpha\,3^n + \beta\,n\,3^n$.