MATHÉMATIQUES
Devoir surveillé n°1
Durée : 3 heures 30

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Problème

On définit, pour λ réel non nul, la fonction f_λ par

$$f_\lambda(x) = 2\lambda\sqrt{1+x^2} + x\arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

Préliminaires

1. Déterminer l'ensemble de définition et les éventuelles « symétries » de f_λ.

2. Prouver que f_λ est prolongeable par continuité en 0. On notera encore f_λ la fonction prolongée. Que vaut désormais $f_\lambda(0)$?

3. Étudier la dérivabilité en 0.

On étudie désormais f_λ sur $\mathbb{R}_+$ et on note $\mathcal{C}_\lambda$ la courbe représentative correspondante de f_λ dans un repère orthonormé.

Partie A : étude de la fonction sur $\mathbb{R}_+$

1. (a) Calculer f'_λ. La fonction f_λ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$?

(b) Montrer que si $\lambda < 0$, f'_λ s'annule sur $\mathbb{R}_+^*$ en une seule valeur notée x_λ. Vous préciserez également le signe de f'_λ sur chacun des intervalles $]0, x_\lambda[$ et $]x_\lambda, +\infty[$.

(c) Montrer que si $\lambda > 0$, f'_λ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

(d) Dresser le tableau des variations de f_λ suivant les valeurs de λ.

2. Étudier la concavité des courbes $\mathcal{C}_\lambda$.

3. Montrer que la courbe $\mathcal{C}_\lambda$ admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$, précisez l'équation de cette asymptote et sa position par rapport à $\mathcal{C}_\lambda$.

4. (a) Montrer que l'ensemble des points $M_\lambda(x_\lambda, f_\lambda(x_\lambda))$ est inclus dans la courbe Γ d'équation : $y = 1 - \dfrac{1}{x}\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

(b) Prouver que la courbe Γ coupe le demi-axe des abscisses positives en un seul point d'abscisse α.

(c) Encadrement du réel α :

i. Justifier que $\alpha \leq 1$.

ii. Démontrer l'identité :

$$\forall\, u > 0,\ \arctan\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan u$$

et justifier l'inégalité :

$$\forall\, t \geq 0,\ \arctan(t) \leq t.$$

iii. En déduire l'encadrement :

$$\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq 1.$$

Avant d'aborder les parties B et C, nous rappelons que α est l'unique réel strictement positif vérifiant : $\arctan\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) = \alpha$*, et qu'il est compris dans* $\left[\dfrac{\pi}{4}, 1\right]$.

Partie B : étude d'une suite

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 1 \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \arctan\left(\frac{1}{u_n}\right)$$

1. Justifier que tous les termes de la suite (u_n) sont bien définis. Précisez la valeur de u_1.

2. On note $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{cases}$.

Montrer que l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{4}, 1\right]$ est stable par φ et que

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}, 1\right],\quad |\varphi'(x)| \leq \frac{1}{1 + (\frac{\pi}{4})^2} \leq k$$

3. En déduire que $|u_{n+1} - \alpha| \leq k|u_n - \alpha|$ puis que

$$|u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|$$

pour tout entier n.

4. Justifier la convergence de la suite (u_n), précisez sa limite.
5. Écrire une fonction MATLAB `suite`
```
function y=suite(p)
```
dépendant d'un paramètre entier p, qui renvoie une valeur approchée à 10^{-p} près du réel α.

À l'aide de ce programme, on trouve une valeur approchée de α à 10^{-3} près : $\alpha \simeq 0.860$.

Partie C : étude des intersections de $\mathcal{C}_\lambda$ avec l'axe des abscisses (Ox).

1. (a) Pour $x > 0$, on pose $H(x) = \dfrac{-x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{2\sqrt{1+x^2}}$.
   Justifier que $H(\mathbb{R}_+^*) = \left[-\dfrac{\alpha^2}{2\sqrt{1+\alpha^2}},\ 0\right[$.

   (b) Montrer que la courbe $\mathcal{C}_\lambda$ rencontre l'axe des abscisses si, et seulement si, le paramètre λ appartient à l'intervalle $\left[-\dfrac{\alpha^2}{2\sqrt{1+\alpha^2}},\ 0\right[$. Quel est alors le nombre d'intersections ?

On indique une valeur approchée de la quantité $\frac{\alpha^2}{2\sqrt{1+\alpha^2}}$: $\dfrac{\alpha^2}{2\sqrt{1+\alpha^2}} \simeq 0.28$.

2. (a) Justifier que pour tout $n > 1$, la courbe $\mathcal{C}_{-\frac{1}{2n}}$ admet deux points d'intersection avec l'axe (Ox) que l'on notera a_n et b_n avec, $a_n < b_n$.

   (b) À l'aide des variations de la fonction H, déterminer la monotonie des suites (a_n) et (b_n), puis justifier l'encadrement :
   $$0 < a_n < \frac{2}{n} < b_n < n.$$

   (c) Étude de la suite (a_n) :
   i. Montrer que la suite (a_n) converge vers 0.
   ii. Justifier l'identité : $a_n\left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan(a_n)\right) = \dfrac{1}{n}\sqrt{1+a_n^2}$.
   En déduire que $a_n \sim \dfrac{2}{n\pi}$ quand n tend vers $+\infty$.

   (d) Étude de la suite (b_n) :
   i. Justifier que la suite (b_n) diverge vers $+\infty$.
   ii. Justifier l'égalité : $\arctan\left(\dfrac{1}{b_n}\right) = \dfrac{1}{n}\sqrt{1+\dfrac{1}{b_n^2}}$.
   En déduire $b_n \sim n$ quand n tend vers $+\infty$.
   iii. Montrer que $b_n = n + o(1)$ quand n tend vers $+\infty$.