Correction du devoir n°10

EXERCICE 1

1. (a) $M = U\,{}^tV = \begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 3 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 6 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$; $M^2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

   Donc $M^0 = I_4,\ M^2 = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}$ donc $\forall p \geqslant 2,\ M^p = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}$.

   (b) Montrons que M admet comme unique valeur propre 0 :
   Soit λ une valeur propre de M et soit $X \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé.
   On a $M\,X = \lambda\,X$, puis $M^2\,X = M\,\lambda\,X = \lambda^2 X$; or $M^2 = O$ donc $M^2 X = 0_{\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$.
   Comme $X \neq 0$, on en déduit $\lambda^2 = 0$ donc $\lambda = 0$.

   Si M était diagonalisable, son unique espace propre (associé à la valeur 0) serait de dimansion n ; on aurait donc $\mathrm{Ker}(M) = \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$, or M n'est pas la matrice nulle donc ce n'est pas le cas. On en déduit :

   $\boxed{M \text{ n'est pas diagonalisable}}$

   (c) $M^2 = U\,{}^tV\,U\,{}^tV = U\,({}^tV\,U)\,{}^tV = U\,\alpha\,{}^tV = \alpha\,U\,{}^tV = \alpha\,M$, par le même raisonnement que précédemment on en déduit que les seules valeurs propres possibles de M sont 0 et α.

   (d) M n'est pas la matrice nulle car ses coefficients sont les produits $a_i\,b_j$ pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et il existe au moins un couple (i,j) tel que a_i et b_j sont tous deux non nuls.
   Comme toutes ses colonnes sont proportionnelles, M est de rang 1 donc 0 est valeur propre de M et $\mathrm{Ker}(M)$ est de dimension $n-1$.

   (e) Si $\alpha = 0$, alors M n'a qu'une valeur propre et la dimension du sous-espace propre associé est strictement inférieure à n donc M n'est pas diagonalisable.
   Si $\alpha \neq 0$ alors $M\,U = U\,{}^tV\,U = \alpha\,U$ donc U est un vecteur propre de M associé à la valeur α. Ainsi M admet 0 et α comme valeurs propres, le sous-espace propre associé à 0 est de dimension $n-1$, celui associé à α est au minimum de dimension 1, donc de dimension 1 sinon la somme des dimensions des sous-espaces propres serait supérieure à n ; on en déduit que M est diagonalisable.

   $\boxed{\exists \alpha \in \mathbb{R},\ M^2 = \alpha\,M \text{ et } (\alpha \neq 0 \iff M \text{ est diagonalisable})}$

2. Soit M une matrice de rang 1, alors $\mathrm{Im}(M)$ est une droite vectorielle engendrée par un vecteur U, donc $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $M\,X = \lambda(X)\,U$
   Toutes les colonnes de M sont colinéaires à U donc il existe des coefficients $(b_1, \ldots, b_n)$ réels tels que les colonnes de M sont $b_1\,U, \ldots, b_n\,U$. Ainsi $M = U\,(b_1, \ldots, b_n) = U\,{}^t\,V$ avec $V = \begin{pmatrix}b_1\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$

EXERCICE 2

1. On peut appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction exp sur $[0, x]$:
$\exists \theta \in]0,1[\,,\ e^x - e^0 = (x-0)\,e^{\theta\,x}$ c'est à dire $e^x = 1 + x\,e^{\theta\,x}$
$\star$ si $x \geqslant 0$, alors $\theta\,x$ aussi, donc $e^{\theta\,x} \geqslant 1$ et $x\,e^{\theta\,x} \geqslant x$;
$\star$ si $x < 0$, alors $0 < e^{\theta\,x} < 1$, donc $x < x\,e^{\theta\,x} < 0$.
Ainsi on a toujours $e^x \geqslant 1 + x$
Remarque : $\theta\,x$ est toujours compris entre 0 et x, quel que soit le signe de x, ceci a l'avantage d'utiliser une même formule dans tous les cas.

2. (a) I_n et W_n sont des intégrales de fonctions définies sur un segment, donc parfaitement définies.
(b) J_n est impropre en $+\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \geqslant 0$, $0 < \dfrac{1}{(1+t^2)^n} \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$
Une primitive de $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est $t \longmapsto \operatorname{Arctan} t$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ est convergente.
Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, on en déduit que J_n est une intégrale convergente.
$\forall t \geqslant 0$, $\dfrac{1}{(1+t^2)^0} = 1$ donc J_0 est une intégrale grossièrement divergente, J_0 n'est pas définie.

3. (a) D'après 1, $\forall t \in [0,1]\,,\ 0 \leqslant 1 - t^2 \leqslant e^{-t^2}$, donc $\forall t \in [0,1]\,,\ 0 \leqslant (1-t^2)^n \leqslant e^{-n\,t^2}$
Par intégration entre 0 et 1 on obtient alors : $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 e^{-n\,t^2}\,\mathrm{d}t$
De même $\forall t \geqslant 0\,,\ 0 < 1 + t^2 \leqslant e^{t^2}$, donc $0 < (1+t^2)^n \leqslant e^{n\,t^2}$ puis $0 < e^{-n\,t^2} \leqslant \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$
Par intégration sur $\mathbb{R}^+$ on obtient alors : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-n\,t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t = J_n$
(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$:
$\star$ On effectue le changement de variable $u = \sqrt{n}\,t$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-n\,t^2}\,\mathrm{d}t$:
$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-n\,t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{n}}$, donc I est une intégrale convergente et $I = \sqrt{n}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-n\,t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{n}\,J_n$
$\star$ On effectue à nouveau le changement de variable $u = \sqrt{n}\,t$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 e^{-n\,t^2}\,\mathrm{d}t$:
$\displaystyle\int_0^1 e^{-n\,t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2}\,\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{n}}$, donc $I_n \leqslant \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2}\,\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{n}} \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{n}} = \frac{I}{\sqrt{n}}$
Ces deux inégalités prouvent donc que I est une intégrale convergente et que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ I_n \leqslant \frac{I}{\sqrt{n}} \leqslant J_n}$$

4. $\forall t \in \left[0\,,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant \cos t \leqslant 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \forall t \in \left[0\,,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant (\cos t)^{n+1} \leqslant (\cos t)^n$
et par intégration de 0 à $\dfrac{\pi}{2}$: $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ 0 \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$

$$\boxed{(W_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite décroissante à valeurs positives}}$$

5. $W_n - W_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((\cos t)^n - (\cos t)^{n+2}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n\,(\sin t)^2\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((\cos t)^n\ \sin t\right)\sin t\,\mathrm{d}t$
$$W_n - W_{n+2} = \underbrace{\left[\frac{(\cos t)^{n+1}}{n+1}\ \sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{0} - \frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n+1} \times (-\cos t)\mathrm{d}t = \frac{W_{n+2}}{n+1}$$
Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_n = W_{n+2}\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)$ donc $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\,W_n$

6. (a) Soit $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = (n+2)\,W_{n+1}\,W_{n+2} = (n+2)\,W_{n+1} \times \dfrac{n+1}{n+2}\,W_n = (n+1)\,W_n\,W_{n+1} = u_n$

Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante, égale à son premier terme u_0.

$W_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,\mathrm{d}t = \Big[\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$ donc $u_0 = \dfrac{\pi}{2}$, finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,,\ (n+1)\,W_n\,W_{n+1} = \frac{\pi}{2}}$$

(b) $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante donc $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$

$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ W_n > 0$ donc $\dfrac{W_{n+2}}{W_{n+2}} \leqslant \dfrac{W_{n+1}}{W_{n+2}} \leqslant \dfrac{W_n}{W_{n+2}}$ c'est à dire $1 \leqslant \dfrac{W_{n+1}}{W_{n+2}} \leqslant \dfrac{n+2}{n+1}$

Par le théorème des gendarmes on en déduit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_{n+2}} = 1$ donc $W_{n+2} \underset{n\to\infty}{\sim} W_{n+1}$ ou ce qui revient au même $W_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} W_n$.

(c) On sait que $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ (n+1)\,W_n\,W_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$ donc $\dfrac{\pi}{2} = (n+1)\,W_n\,W_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} n\,(W_n)^2$ et comme W_n est positif, on en déduit :

$$\boxed{W_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2\,n}}}$$

7. ⋆ On effectue le changement de variable $t = \sin u$ dans l'intégrale I_n :

$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - (\sin u)^2\right)^n \cos u\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{2\,n+1}\,\mathrm{d}u = W_{2\,n+1}$

⋆ On effectue le changement de variable $t = \tan u$ dans l'intégrale J_{n+1} :

on utilise l'égalité $\dfrac{1}{(1+\tan^2 u)} = \cos^2 u$

$J_{n+1} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1+\tan^2 u)^{n+1}}\,(1+\tan^2 u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{2\,n}\,\mathrm{d}u = W_{2\,n}$

8. En utilisant l'encadrement obtenu à la question 3b et les égalités de la question 7, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = W_{2\,n+1} \leqslant \dfrac{I}{\sqrt{n}} \leqslant J_n = W_{2\,n-2}$

D'autre part l'équivalent de W_n obtenu à la question 6b donne $\dfrac{I}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{4\,n}}$ et par conséquent

$$\boxed{I = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$