Devoir maison 5

à rendre pour le mercredi 16 novembre

Exercice 1 (matrices, probabilités)

PARTIE I

Le but de cette partie est de calculer les puissances successives de la matrice

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$$

où a est un nombre réel.

1. Montrer que
$$\forall\,(a,b) \in \mathbb{R}^2\,, \quad M(a)M(b) = M(a+b-3ab)$$
2. En déduire que si $a \neq \dfrac{1}{3}$, $M(a)$ est inversible et donner son inverse.
3. Déterminer, en utilisant la question 1., le réel a_0 non nul tel que
$$\left[M(a_0)\right]^2 = M(a_0)$$
En déduire que $M\left(\dfrac{1}{3}\right)$ n'est pas inversible.
4. On note I la matrice identité d'ordre 3 et on pose
$$P = M(a_0) \quad \text{et} \quad Q = I - P$$
Soit $a \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer qu'il existe un réel α, que l'on exprimera en fonction de a, tel que
$$M(a) = P + \alpha Q$$
   (b) Calculer P^2, Q^2, PQ et QP. En déduire une expression de $\left[M(a)\right]^2$ en fonction de P, Q et α.
   (c) Pour tout entier naturel n non nul, montrer que $\left[M(a)\right]^n$ s'écrit comme une combinaison linéaire de P et Q. Expliciter alors la matrice $\left[M(a)\right]^n$ en donnant ses coefficients en fonction de a et de n.

PARTIE II

Soit a un réel tel que $a \in \left]0, \dfrac{1}{3}\right[$. Un mobile se déplace d'un sommet à l'autre d'un triangle ABC selon les règles suivantes :

- il se situe en A à l'instant 0.
- s'il se situe à un sommet à l'instant n ($n \in \mathbb{N}$), à l'instant $n+1$: il se déplace vers chacun des 2 autres sommets avec la probabilité a et reste en place avec la probabilité $1-2a$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

- A_n l'événement « le mobile se situe au sommet A à l'instant n ». On pose $a_n = P(A_n)$.
- B_n l'événement « le mobile se situe au sommet A à l'instant n ». On pose $b_n = P(B_n)$.
- C_n l'événement « le mobile se situe au sommet A à l'instant n ». On pose $c_n = P(C_n)$.

A_0 est donc l'événement certain, B_0 et C_0 l'événement impossible.

1. Déterminer a_1, b_1 et c_1.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note U_n la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad U_{n+1} = M(a)U_n$$
   où $M(a)$ est la matrice de la PARTIE I.
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les valeurs de a_n, b_n et c_n en fonction de a et de n.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note D_n l'événement « le mobile se situe au sommet A à l'instant n, ceci pour la première fois depuis le départ ».
   (a) Exprimer D_n à l'aide des événements A_k ou de leur complémentaire, puis en déduire la valeur de $P(D_n)$.
   (b) Calculer la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} P(D_n)$. Interpréter et expliquer ce résultat.

Exercice 2 (polynômes, séries)

On suppose que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n^2}$$

et on note, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \, : \, k \in \mathbb{Z}\}$, $\operatorname{cotan}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

1. Prouver que
$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \operatorname{cotan}^2(x) < \frac{1}{x^2} < 1 + \operatorname{cotan}^2(x)$$
   On a les inégalités suivantes : pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $0 < \sin(x) < x < \tan(x)$ (inutile de les redémontrer, mais assurez-vous de savoir le faire, faites plutôt un dessin). Les utiliser pour en déduire le résultat (c'est immédiat).
2. Soit n un entier naturel non nul quelconque.
   (a) En utilisant la formule de Moivre, prouver l'existence d'un polynôme P_n tel que :
$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{\sin^{2n+1}(x)} = P_n\left(\operatorname{cotan}^2(x)\right)$$
   (b) Préciser degré, coefficients et racines de ce polynôme P_n. En déduire
$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}$$
   <u>Rappel</u> : la somme des racines du polynôme $P_n = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ vaut $-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$.
3. Donner alors un encadrement de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2n+1}{k\pi}\right)^2$, puis de S_n.
4. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge vers $\dfrac{\pi^2}{6}$.