Devoir maison 2

à rendre pour le mercredi 05 octobre

Dans tout ce problème, E désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles : $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Soit a un réel strictement supérieur à $\dfrac{1}{4}$ et distinct de 1. On pose :

$$F = \{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \,/\, \forall n \in \mathbb{N}\,,\; u_{n+3} = 3au_{n+1} + (1-3a)u_n\}$$

Partie I : Résultats préliminaires

1. Démontrer que l'équation $x^2 + x + 1 - 3a = 0$ admet deux solutions réelles r_1 et r_2 avec $r_1 \neq r_2$.
2. Prouver que la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & r_1 & r_2 \\ 1 & (r_1)^2 & (r_2)^2 \end{pmatrix}$ est inversible.

Partie II : Etude de F

On définit trois suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad x_n = 1\,, \quad y_n = (r_1)^n \quad \text{et} \quad z_n = (r_2)^n$$

1. (a) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
   (b) Montrer que x, y et z sont des suites de F.
   (c) Démontrer que la famille (x, y, z) est libre.
2. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de F. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_{n+1} - u_n$.
   (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+2} + w_{n+1} + (1-3a)w_n = 0$.
   (b) En déduire qu'il existe deux réels λ et μ tels que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad u_{n+1} - u_n = \lambda\,(r_1)^n + \mu\,(r_2)^n$$
   (c) Prouver enfin que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad u_n = \lambda\left(\frac{1-(r_1)^n}{1-r_1}\right) + \mu\left(\frac{1-(r_2)^n}{1-r_2}\right) + u_0$$
3. A l'aide de ce qui précède, démontrer que la famille (x, y, z) est une base de F.