Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

Correction du DM N°5

« Simulation & intervalles de confiance - probabilités - analyse »

Simulation - intervalle de confiance

1.
```
def choisir(L,p):
        N=len(L)
        if p<0:
            p=abs(p)
        if p>N:
            p=N
        elif floor(p)!=p:
            p=floor(p)
        C=[]
        for k in range(p):
            choix=randint(0,N-k-1)
            C.append(L[choix])
            L.remove(L[choix])
        return C
```

2.
```
def simulation(a,N1,N2):
        N=N1+N2
        S,Banque=a,N
        while (S>0)&(N>0):
            N=N-1
            Tirage=randint(0,N)
            if Tirage<N1:
                S,N1,Banque=S+1,N1-1,Banque-1
            else:
                S,N2,Banque=S-1,N2-1, Banque+1
        return  S
```

3.
```
Nombre,N1,N2,a=10000,18,17,5
Ruines,Gain=0,0
for k in range(1,Nombre):
        S=simulation(a,N1,N2)
        if S==0:
            Ruines=Ruines+1
        Gain=Gain+S-a
ProbaGain=1-(Ruines/Nombre)
```

- En lançant le programme, on obtient un peu plus de 1800 ruines sur 10 000 parties en moyenne (la probabilité théorique de ne pas être ruiné est $p \simeq 0,8161$)
  Les parties étant indépendantes, le nombre de ruines suit une loi binômiale de paramètres $N = 10\,000$ et $q \simeq 0,1839$, donc l'espérance vaut $m = N \times p = 1839$, la variance $V = N \times p \times (1-p) \simeq 1500,8$ et l'écart type $\sigma = \sqrt{V} \simeq 38,74$.
  L'intervalle de confiance à 5% pour le nombre de ruines est donc $I = [m - 1,96 \times \sigma\,;\, m + 1,96 \times \sigma] = [1\,763\,;\,1\,915]$
  Pour la probabilité de ne pas être ruiné, on obtient comme intervalle $[0,8085\,;\,0,8270]$
- S est nul lorsqu'on est ruiné et vaut 6 $(5 + 18 - 17)$ lorsqu'on va au bout des tirages, donc
  $\dfrac{S}{6} \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, $E(S) = 6 \times p + 0 \times (1-p) = 6\,p \simeq 4,9$ et $V(S) = 36 \times p \times (1-p) \simeq 5,4$.
  L'intervalle de confiance pour $E(S)$ est donc $\left[E(S) - 1,96 \times \dfrac{\sqrt{V(S)}}{100}\,;\, E(S) + 1,96 \times \dfrac{\sqrt{V(S)}}{100}\right]$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Intervalle de confiance pour } p : \ [0,8085\,;\,0,8270] \\[2ex] \text{Intervalle de confiance pour } E(S) : \ [4,85\,;\,4,95]\end{array}}$$

Probabilités

1. On peut prendre comme univers l'ensemble des arrangements des $n+3$ boules (ce qui revient à distinguer les boules noires les unes des autres) et la probabilité uniforme. Comme $\mathrm{Card}(\Omega) = (n+3)!$ la probabilité d'obtention de chacune des suites ordonnées de boules est $\frac{1}{(n+3)!}$
Remarque : si on considère les boules noires comme indiscernables, alors les tirages ne sont pas équiprobables.

2. N_1 est le rang de la première boule blanche donc $N_1 = \min(R_1, R_2, R_3)$; de même $N_3 = \max(R_1, R_2, R_3)$

3. Toutes les boules ont la même probabilité d'être obtenues à un tirage donné, donc les rangs de B_1, B_2 et B_3 (ainsi que celui de toutes les boules noires) suivent la même loi. C'est la loi uniforme sur $[\![1, n+3]\!]$.

4. • Les valeurs prises par le couple (R_1, R_3) sont tous les couples (i,j) de $[\![1, n+3]\!]^2$ avec (i,j).
$P(R_1 = i, R_3 = j) = P(R_1 = i \times P_{R_1 = i}(R_3 = j)$ donc $\forall i \in [\![1, n+3]\!]$, $P(R_1 = R_3 = i) = 0$ et
$\forall (i,j) \in [\![1, n+3]\!]^2,\ i \neq j,\ P(R_1 = i, R_3 = j) = \dfrac{1}{(n+3)(n+2)}$.
• $1 \leqslant N_1 < N_2 < N_3 \leqslant n+3$ donc on a toujours $1 \leqslant N_1 \leqslant N_3 - 2 \leqslant n+1$
Par conséquent, $\forall (i,j) \in [\![1, n+3]\!]^2$, $P(N_1 = i, N_3 = j) = 0$ si $i \geqslant j-1$ et sinon $P(N_1 = i, N_3 = j) = \dfrac{6\,(j-i-1)}{(n+3)(n+2)(n+1)}$

5. $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$, $P(N_1 = i) = \displaystyle\sum_{j=3}^{n+3} P(N_1 = i, N_3 = j) = \sum_{j=i+2}^{n+3} P(N_1 = i, N_3 = j)$

$\forall i \in [\![1, n+1]\!]$, $P(N_1 = i) = \displaystyle\sum_{j=i+2}^{n+3} \frac{6\,(j-i-1)}{(n+3)(n+2)(n+1)} = \frac{3\,(n+2-i)\,(n+3-i)}{(n+3)(n+2)(n+1)}$

$\forall i \in [\![1, n+1]\!]$, $E(N_1) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} i\, P(N_1 = i) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{3\,i\,(n+2-i)\,(n+3-i)}{(n+3)(n+2)(n+1)}$

On calcule en développant et en utilisant $\sum_1^n i = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_1^n i^2 = \frac{n(n+1)(2\,n+1)}{6}$ et $\sum_1^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

On peut aussi remarquer que $\dbinom{n+3-i}{3} = \dfrac{(n+1-i)\,(n+2-i)\,(n+3-i)}{6}$ donc

$\dfrac{3\,i\,(n+2-i)\,(n+3-i)}{(n+3)(n+2)(n+1)} = \dfrac{(n+2-i)\,(n+3-i)}{2\,(n+3)(n+2)} - 12\dbinom{n+3-i}{3}$

et on obtient après simplification $E(N_1) = \dfrac{n+3}{4}$

6. On détermine de même la loi de N_3 : $\forall j \in [\![3, n{+}3]\!]$, $P(N_3 = j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{j-2} \frac{6\,(j-i-1)}{(n+3)(n+2)(n+1)} = \frac{3\,(j-1)\,(j-2)}{(n+3)(n+2)(n+1)}$

On remarque que $P(N_3 = j) = P(N_1 = n+3-j)$, donc $E(N_3) = (n+3) - E(N_1) = \dfrac{3\,(n+3)}{4}$

Analyse

1. (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k = \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)}$ (somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $-x \neq 1$).
Cette formule est valable pour tout $x \neq -1$, donc en particulier pour $x \in]-1, 1]$, donc
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x} - \frac{(-x)^n}{1+x}$ d'où la formule annoncée.

(b) $\forall x \in]-1, 1]$ les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$, $t \mapsto \dfrac{(-1)^n t^n}{1+t}$ et $t \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k$ sont continues sur $[0, x]$ donc :

$\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^x (-1)^k t^k\,\mathrm{d}t + \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$, soit $\displaystyle\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$, puis par changement d'indice $(j = k-1)$

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t}$$

(c) Soit $x \in]-1,1]$; si $x \in [0,1]$ alors $\forall t \in [0,x]$, $\left|\dfrac{t^n}{1+t}\right| = \dfrac{t^n}{1+t} \leqslant t^n$ donc $\displaystyle\int_0^x \left|\frac{t^n}{1+t}\right| \mathrm{d}t \leqslant \int_0^x t^n \,\mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

et si $x \in]-1,0[$ alors $\forall t \in [x,0]$, $\left|\dfrac{t^n}{1+t}\right| \leqslant \dfrac{|t|^n}{1+x}$ donc $\displaystyle\left|\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{-1}{1+x}\int_0^x t^n \,\mathrm{d}t = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+x)}$

Dans les deux cas, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\, x^k = \ln(1+x)$

2. Il suffit d'appliquer la formule établie à la question précédente à $x = 1$ et $x = -\frac{1}{2}$:

$$\ln 2 = \ln(1+1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \times 1^k \text{ et } -\ln 2 = \ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^k = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\,2^k}$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$;
$$S_{2n+2} - S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^{k-1}\, u_k - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} u_k = (-1)^{2n+1} u_{2n+2} + (-1)^{2n}\, u_{2n+1}$$
$$= -u_{2n+2} + u_{2n+1} \geqslant 0 \quad \text{car } u_{2n+1} \geqslant u_{2n+2} \quad \boxed{(S_{2n}) \text{ est croissante}}$$
$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+3} (-1)^{k-1}\, u_k - \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} u_k = (-1)^{2n+2} u_{2n+3} + (-1)^{2n+1}\, u_{2n+2}$$
$$= u_{2n+3} - u_{2n+1} \leqslant 0 \quad \text{car } u_{2n+3} \leqslant u_{2n+2} \quad \boxed{(S_{2n+1}) \text{ est décroissante}}$$

D'autre part $S_{2n+2} - S_{2n+1} = (-1)^{2n+1}\, u_{2n+2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc (S_{2n+1}) et (S_{2n}) sont adjacentes.

(b) (S_{2n+1}) et (S_{2n}) sont adjacentes donc convergent vers un même réel S ; par conséquent la suite (S_n) converge vers S. Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\, u_k = S \in \mathbb{R}$; la suite des sommes partielles de la série converge, donc la série est convergente, de somme S.

(S_{2n}) est croissante donc converge vers la borne supérieure de l'ensemble de ses termes : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} \leqslant S$.

(S_{2n+1}) est décroissante donc converge vers la borne inférieure de l'ensemble de ses termes : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n-1} \geqslant S$.

(c) $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant S_{2n+1} - S \leqslant S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1}$ donc $|S_{2n+1} - S| \leqslant u_{2n+1}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \geqslant S_{2n} - S \geqslant S_{2n} - S_{2n+1} = u_{2n+1}$ donc $|S_{2n} - S| \leqslant u_{2n+1} \leqslant u_{2n}$

Finalement $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |S_n - S| \leqslant u_n$

(d) La suite de terme général $\dfrac{1}{k}$ décroît vers 0 ; on peut donc appliquer le résultat de la question précédente à la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ dont la somme vaut $\ln 2$: $\forall n \geqslant 1$, $\displaystyle\left|\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| \leqslant \frac{1}{n}$

On en déduit que $\displaystyle\frac{1}{n} \leqslant 10^{-p} \Longrightarrow \left|\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| \leqslant 10^{-p}$, donc $\boxed{N_p = 10^p}$ convient.

$$\boxed{(n \geqslant 10^p) \Longrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \text{ est une valeur approchée à } 10^{-p} \text{ près de } \ln 2\right)}$$

4. (a) R_n est positif car c'est une somme de termes positifs ; d'autre part, $\forall k \geqslant n+1$, $\dfrac{1}{k\,2^k} \leqslant \dfrac{1}{2^k}$ donc

$$R_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-n-1}} \underset{(j=k-n-1)}{=} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^n}$$

(b) $\displaystyle\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,2^k} = R_n$, donc $\displaystyle\left(R_n \leqslant 10^{-p}\right) \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,2^k}$ est une valeur approchée à 10^{-p} de $\ln 2$.

Comme $R_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$, il suffit de prendre N'_p tel que $\dfrac{1}{2^{N'_p}} \leqslant 10^{-p}$ c'est à dire $\boxed{N'_p \geqslant \dfrac{p\ln 10}{\ln 2}}$

(c) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2^n \geqslant n$ donc $\dfrac{1}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{n}$; par conséquent $\dfrac{1}{2^{N_p}} \leqslant \dfrac{1}{N_p} \leqslant 10^{-p}$, donc $N_p \geqslant N'_p$.

<u>Remarque</u> : En fait lorsque p tend vers $+\infty$ (c'est à dire si on fait tendre la précision de l'approximation vers 0) $\dfrac{1}{2^n} \underset{n\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, donc N_p et N'_p tendent vers l'infini mais $N'_p = o(N_p)$.

Par exemple, pour $n = 2$ on obtient $N_2 = 100,\ N'_2 = 7$ et pour $n = 10$ on a $N_{10} = 10^{10},\ N'_{10} = 34$.

La convergence est considérablement plus rapide avec la deuxième série.